Universität Mannheim

Fakultät für Rechtswissenschaft und Volkswirtschaftslehre
Abteilung Volkswirtschaftslehre

Christian Groh und Jörg Gutsche

Wiederholungskurs Schulmathematik

Kursbegleitendes Skript und Übungsaufgaben

2. Auflage, April 2014

Vorwort

In den vergangenen Jahren wurde immer wieder festgestellt, daß insbesondere diejenigen Studienanfänger, deren Schulzeit bereits einige Zeit zurückliegt oder die in der gymnasialen Oberstufe keinen entsprechenden Schwerpunkt gesetzt haben, ihr Studium mit zum Teil nicht unerheblichen Defiziten im Bereich der Mathematik beginnen. Um die daraus erwachsende zusätzliche Erschwernis etwas zu mindern, bietet die Fakultät für Volkswirtschaftslehre zu Beginn eines jeden Semesters einen Wiederholungskurs Schulmathematik in Form einer 14-tägigen Blockveranstaltung an.

Das Ihnen vorliegende Skriptum kann und will den Besuch dieses Kurses keinesfalls ersetzen, da in dessen Rahmen der Stoff zum Teil in anderer Gewichtung und um zahlreiche Beispiele bereichert dargeboten wird. Es soll lediglich allen Kursteilnehmern als Unterlage dienen, in der die wichtigsten Kursinhalte in geordneter Form zusammengestellt sind. Desweiteren kann es all jenen Studierenden, die am Kurs selbst nicht teilgenommen haben, eine Orientierungshilfe geben, welche Inhalte während des Kurses behandelt wurden, um jene, gegebenenfalls mit der Unterstützung weiterer Literatur, nötigenfalls selbständig zu wiederholen.

Selbstverständlich bieten sich zahlreiche Möglichkeiten zur Verbesserung dieses Skriptums. Für Anregungen und Kritik diesbezüglich bin ich Ihnen daher jederzeit dankbar.

J.G.

Natürlich hat Jörg Gutsche weiterhin den Löwenanteil dieses Skriptes verfasst. Dennoch habe ich das Dokument zu Beginn des SS 2006 um einige Aspekte ergänzt. Das Summenzeichen wird nun etwas ausführlicher - im Kapitel Arithmetik - behandelt. Es gibt nun auch ein Kapitel zur Kurvendiskussion, die ja für Optimierungsprobleme nicht ganz unwichtig ist. Ausserdem gibt es nun minimale Einführungen zum Thema Funktionen mit mehreren Variablen und der partiellen Ableitung. Mittlerweile sind mehrere, sehr gute Mathematikbücher für Wirtschaftswissenschaftler erschienen, insbesondere [10] und [9]. Diese können ebenfalls zur Wiederholung des Schulwissens herangezogen werden.

Christian Groh

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundzüge der Mengenlehre

In diesem Kapitel soll eine kurze Wiederholung ausgewählter Elemente der Mengenlehre gegeben werden. Jene ist ein grundlegender Bestandteil der Mathematik, da sie Konzepte bereitstellt, die den geordneten Umgang mit gleichartigen Objekten mathematischer Betrachtungen ermöglichen.

1.1 Grundbegriffe

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte, wobei von jedem Objekt eindeutig feststehen muß, ob es zur Menge gehört oder nicht. Gehört ein Objekt zu einer Menge, so bezeichnet man es auch als **Element** dieser Menge. Ist ein Objekt e Element einer Menge M, so schreibt man dafür $e \in M$ (sprich: e Element M); ist e hingegen nicht Element von M, so schreibt man dafür $e \notin M$ (sprich: e nicht Element M).

Üblicherweise wird eine Menge auf eine von zwei Arten beschrieben:

Die erste besteht darin, alle ihre Elemente in geschweifte Klammern eingefaßt und durch Kommata getrennt vollständig aufzuzählen. Beispielsweise beschreibt der Ausdruck $\{a, e, i, o, u\}$ die Menge aller Vokale des lateinischen Alphabets. In unzweideutigen Fällen ist, will man sich Schreibarbeit sparen oder ist die vollständige Aufzählung aller Elemente unmöglich, die Verwendung von Ellipsen $(\ldots)$ erlaubt. So wird jeder $\{a, b, c, d, e, \ldots, z\}$ unzweideutig als die Menge aller kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets und $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ als die Menge aller positiven und geraden Zahlen erkennen.

Die zweite gebräuchliche Art der Beschreibung ist die, eine allen Elementen einer Menge und nur diesen anhaftende und somit für Elemente dieser Menge charakteristische Eigenschaft anzugeben. So kann man beispielsweise die Menge aller Vokale des lateinischen Alphabets auch als $\{x \mid x \text{ ist Vokal des lateinischen Alphabets }\}$ schreiben.

Eine spezielle Menge ist die sogenannte **leere Menge**. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß sie kein Element enthält und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Ein weiterer wichtiger Begriff der Mengenlehre ist der der **Mächtigkeit**. Jene entspricht für Mengen mit endlich vielen Elementen jeweils der Anzahl von Elementen der Menge. Die Mächtigkeit von Mengen mit unendlich vielen Elementen wird mit dem Symbol ∞ (sprich: unendlich) bezeichnet.[1] Üblicherweise wird die Mächtigkeit einer Menge M als $|M|$ geschrieben.

Beispiel 1.1:
a) Sei $M := \{2, 3, 4\}$. Dann ist $|M| = 3$.
b) Sei $N := \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$. Dann ist $|N| = 3$.
c) Es ist $|\{1, 2, 3, \ldots\}| = \infty$.

Ähnlich wie die reellen Zahlen in verschiedenen, durch Relationen ($=, \neq, >, \geq, <, \leq$) formalisierten Beziehungen zueinander stehen, ist dieses auch für Mengen der Fall. Gilt für zwei Mengen A und B, daß jedes Element von A auch Element von B ist, so heißt A auch **Teilmenge** von B. Man schreibt $A \subseteq B$. Existiert darüberhinaus ein Element von B, welches nicht Element von A ist, so heißt A **echte Teilmenge** von B, und man schreibt $A \subset B$. Gilt für zwei Mengen A und B sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$, haben also beide Mengen die gleichen Elemente, so heißen diese Mengen gleich, und man schreibt $A = B$.[2] Der Umstand, daß zwei Mengen A und B ungleich sind oder aber A nicht Teilmenge bzw. nicht echte Teilmenge von B ist, wird durch die Ausdrücke $A \neq B$, $A \not\subseteq B$ bzw. $A \not\subset B$ beschrieben.

Beispiel 1.2: Sei $M := \{2, 3, 4\}$, $N := \{2, 4\}$, $P := \{4, 3, 2\}$ und $Q := \{\{2\}\}$. Dann gilt:
a) $N \subseteq M \subseteq P$
b) $N \subset M$ und $M \not\subset P$
c) $M = P$
d) $Q \not\subset M$

In einigen Beispielen wurde bereits deutlich, daß Mengen durchaus wiederum Mengen als Elemente enthalten können. Gelegentlich ist nun die Menge aller möglichen Teilmengen einer Menge M von Interesse. Diese Menge heißt **Potenzmenge** von M und wird formal üblicherweise durch das Symbol $\wp(M)$ bezeichnet.

Beispiel 1.3:
a) Gegeben sei die Menge $M := \{1, 2, 3\}$. Als Potenzmenge dieser Menge ergibt sich $\wp(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
b) Gegeben sei die Menge aller Vokale $V := \{a, e, i, o, u\}$. Es gilt $\wp(V) = \{W \mid W \text{ ist eine Menge, deren Elemente allesamt Vokale sind}\}$.
c) Die Potenzmenge der leeren Menge ist $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

---

[1] Bei den unendlichen Mengen wird desweiteren zwischen abzählbar und überabzählbar unendlichen Mengen unterschieden. Im Rahmen dieses Wiederholungskurses wird diese Unterscheidung allerdings nicht behandelt.

[2] Man beachte, daß auch die beiden Mengen $\{a, b\}$ und $\{a, b, b\}$ aufgrund der Forderung, daß alle Elemente wohlunterschieden sein müssen, gleich sind.

1.2 Mengenoperationen

Für Mengen sind verschiedene Operationen definiert, die jeweils zwei Mengen zu einer Ergebnismenge verknüpfen. So ist der **Durchschnitt** zweier Mengen A und B als die Menge aller Objekte definiert, die sowohl Element von A als auch Element von B sind; man schreibt für diese Menge üblicherweise $A \cap B$. Als **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist hingegen die Menge aller Objekte definiert, die entweder Element von A oder Element von B oder Element von A und B sind; man schreibt dafür üblicherweise $A \cup B$.

Beispiel 1.4: Sei $M := \{1, 2, 3\}$ und $N := \{3, 4\}$. Dann gilt:
a) $M \cap N = \{3\}$
b) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$

Ist der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer, ist also $A \cap B = \emptyset$, so heißen diese beiden Mengen **disjunkt**.

Schließlich existiert als Mengenoperation zur Verknüpfung zweier Mengen noch die der **Differenz**. Sie ist für zwei beliebige Mengen A und B als die Menge aller Elemente definiert, die zwar Element von A, nicht aber Element von B sind; man schreibt dafür $A \setminus B$. Man beachte, daß die Bildung der Differenz zweier Mengen im Unterschied zur Bildung des Durchschnitts oder der Vereinigung nicht kommutativ ist, d.h. es gilt in der Regel nicht $A \setminus B = B \setminus A$, wohingegen immer sowohl $A \cup B = B \cup A$ als auch $A \cap B = B \cap A$ gültig ist.

Aufbauend auf der Differenzbildung zweier Mengen wird der Begriff des **Komplements** definiert. Für zwei Mengen A und Ω mit $A \subseteq \Omega$ ist das Komplement von A bezüglich Ω definiert als $\Omega \setminus A$; man schreibt dafür üblicherweise $\mathcal{C}_\Omega A$. Gelegentlich ist bei der Bildung eines Komplements aus dem jeweiligen Kontext klar, bezüglich welcher Grundmenge Ω das Komplement gebildet wird. Verkürzend wird für das Komplement einer Menge A dann lediglich $\mathcal{C}A$ oder auch $\bar{A}$ geschrieben.

Beispiel 1.5: Sei $\Omega := \{\text{Kreuz, Pik, Herz, Karo}\}$ und $A := \{\text{Kreuz, Pik}\}$. Dann ist $\mathcal{C}_\Omega A = \mathcal{C}A = \{\text{Herz, Karo}\}$.

Mengenoperationen und Beziehungen zwischen Mengen werden oftmals in sogenannten **Venn-Diagrammen** graphisch veranschaulicht. In deartigen Diagrammen werden Mengen als geeignete Flächen in der Ebene dargestellt. In Abbildung 1.1 sind beispielhaft die Bildung von Durchschnitt (a), Vereinigung (b), Differenz (c) und Komplement für zwei nicht disjunkte Mengen A und B und eine Grundmenge Ω in Venn-Diagrammen wiedergegeben.

1.3 Rechengesetze für Mengenoperationen

Für die im vorangehenden Abschnitt vorgestellten Mengenoperationen gelten verschiedene Gesetze. Diese sind nachfolgend für beliebige Mengen A, B, C und

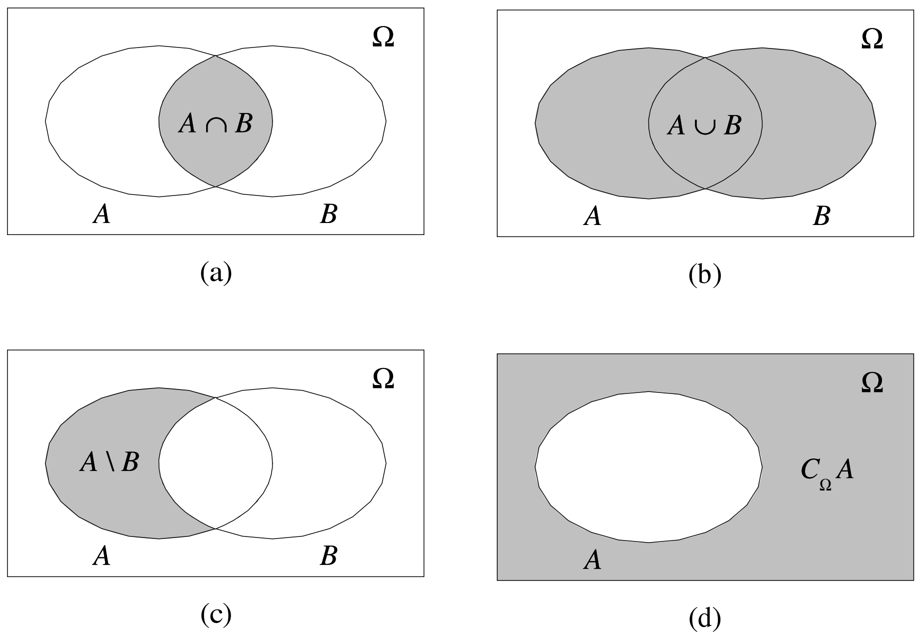


Abbildung 1.1: Venn-Diagramme

Ω mit $A, B, C \subseteq \Omega$ zusammengestellt:

Zunächst gelten sowohl für die Vereinigung als auch die Durchschnittsbildung sowohl daß **Kommutativ-** als auch das **Assoziativgesetz**, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} A \cup B = B \cup A \quad &\text{und} \quad A \cap B = B \cap A, \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad &\text{und} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Desweiteren gelten die beiden **Distributivgesetze**

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Schließlich gelten noch die folgenden Gesetze für die Bildung von Komplementen:

$$\begin{aligned} A \cup \mathcal{C}A = \Omega \quad &\text{und} \quad A \cap \mathcal{C}A = \emptyset, \\ \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B \quad &\text{und} \quad \mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B, \\ \mathcal{C}\emptyset = \Omega \quad &\text{und} \quad \mathcal{C}\Omega = \emptyset, \\ \mathcal{C}\mathcal{C}A &= A. \end{aligned}$$

1.4 Tupel und kartesische Produkte

Mengen sind nicht geordnete Zusammenfassungen von Objekten. Die Mengen $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ sind also gleich. Ist hingegen auch die Reihenfolge zweier Objekte von Bedeutung, kann dieses durch das Konzept des **Tupels** erfasst werden.

Sollen beispielsweise die beiden Objekte a und b in der Weise geordnet zusammengefasst werden, daß b vor a kommt, so werden sie in dem Tupel (b, a) zusammengefasst. Dabei ist b die erste **Komponente** dieses Tupels und a die zweite. Aufgrund der ordnungsgebenden Eigenschaft des Tupels gilt $(b, a) \neq (a, b)$; zwei Tupel sind nur dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten jeweils übereinstimmen.

Beispiel 1.6: Die beiden Tupel $(\text{Karo}, 3)$ und $(\text{Herz}, \text{Ass})$ kann man verwenden, um die beiden entsprechenden Spielkarten zu repräsentieren. Die Menge aller Spielkarten eines französischen Blatts ist dann $B := \{(f, w) \mid f \in \{\text{Kreuz}, \text{Pik}, \text{Herz}, \text{Karo}\}$ und $w \in \{2, 3, \ldots, 10, \text{Bube}, \text{Dame}, \text{König}, \text{Ass}\}\}$. Für jede Hand H zu Beginn eines Doppelkopfspiels gilt nun $H \subset B$ und $|H| = 13$.

Wie in dem vorangehenden Beispiel gesehen ist es oft sinnvoll, nicht nur einzelne Tupel, sondern eine Menge von Tupeln zu betrachten. Oft entstehen solche Mengen von Tupeln durch die Forderung an ihre einzelnen Elemente, daß deren erste Komponente Element einer Menge A und deren zweite Komponente Element einer Menge B sein soll. Genau diese Menge entsteht, indem man das sogenannte **kartesische Produkt** $A \times B$ aus den Mengen A und B bildet.

Beispiel 1.7:
a) Sei $A := \{1, 2\}$ und $B := \{a, b\}$. Dann ist $A \times B = \{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b)\}$.
b) Die Menge aller Felder eines Schachbretts ist $\{A, B, \ldots, H\} \times \{1, 2, \ldots, 8\}$.

Eine offensichtliche Verallgemeinerung des Konzepts des Tupels ist eine geordnete Zusammenfasung nicht nur von zwei, sondern von beliebig vielen Objekten. Deartige Zusammenfassungen heißen **n-Tupel**. Dabei gibt $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Komponenten des Tupels an.[3] Mengen von n-Tupeln gleicher Art können analog zum oben beschriebenen Vorgehen über die Bildung n-facher kartesischer Produkte definiert werden.

Beispiel 1.8: Sei $A := \{u, v, w\}$ und $B := \{x, y, z\}$.
a) (u, v, z) ist ein 3-Tupel und Element von $A \times A \times B$.
b) (u, w, w, v, v, u) ist ein 6-Tupel und Element von $A \times A \times A \times A \times A \times A$. Verkürzend kann man dafür A^6 (sprich: A hoch 6) schreiben.

[3] $\mathbb{N}$ bezeichnet, wie in Abschnitt 3.1 noch ausführlich beschrieben wird, die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Kapitel 2

Grundzüge der Logik

Einen Grundpfeiler der Mathematik stellt die Logik dar, welche sich mit Aussagen, Verknüpfungen von Aussagen und deren Wahrheitsgehalt befaßt.

2.1 Aussagen und Aussageformen

In der deutschen Sprache existieren verschiedene Arten von Sätzen, beispielsweise Fragen, Befehls- und Aussagesätze. Eine **Aussage** A ist dabei dadurch gekennzeichnet, daß ihr zumindest grundsätzlich ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

Beispiel 2.1:
a) Aussagen sind die Sätze: 'Der Mond kreist um die Erde' und 'Mannheim liegt an der Donau'.
b) Keine Aussagen sind die Sätze: 'Mach den Abwasch' und 'Liebst du mich'.

Der Wahrheitswert einer Aussage ist entweder wahr oder falsch (nachfolgend gelegentlich abkürzend mit w bzw. f bezeichnet), ein üblicherweise als **Zweiwertigkeitsprinzip** bezeichneter Umstand.

Beispiel 2.2: Von den Aussagen
a) 'Der Mond kreist um die Erde'
b) 'Mannheim liegt an der Donau'
c) 'Helmut kennt die Spender'
d) 'Neun ist eine gerade Zahl'
sind a) und c) wahr und b) und d) falsch.

Zu jeder Aussage A existiert eine zweite Aussage, die genau das Gegenteil besagt. Sie heißt **Negation** von A, wird mit den Symbolen $\neg A$ oder $\bar{A}$ bezeichnet und ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist.

Beispiel 2.3:
a) Die Negation der Aussage 'Mannheim liegt an der Donau' ist 'Mannheim liegt nicht an der Donau'.
b) Sei $A :=$ 'Der Mond kreist um die Erde'. Dann ist $\bar{A} =$ 'Der Mond kreist nicht um die Erde'. Offensichtlich ist A wahr und $\bar{A}$ falsch.

Desweiteren existieren Sätze, die Variablen enthalten und erst dann, wenn man den Variablen einen bestimmten Wert zuordnet, zu Aussagen werden. Solche Sätze heißen **Aussageformen**, und werden üblicherweise mit einem großen lateinischen Buchtstaben für die Aussageform selbst gefolgt von einem oder mehreren in Klammern gesetzten kleinen lateinischen Buchstaben für die Variablen bezeichnet Die Menge aller Objekte, die in eine Aussageform eingesetzt werden dürfen, heißt **Grundmenge** dieser Aussageform; die Menge der Elemente der Grundmenge, für die die Aussageform eine wahre Aussage ist, heißt **Lösungsmenge** dieser Aussageform.

Beispiel 2.4:
a) Sei $A(x) :=$ 'x ist ein Mädchen' und die dazugehörige Grundmenge $\{\text{Harald}, \text{Klaus}, \text{Gisela}\}$. Dann steht $A(\text{Gisela})$ für die Aussage 'Gisela ist ein Mädchen'.
b) Sei $G(x) :=$ '$x > 2$' und die zu $G(x)$ gehörige Grundmenge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dann ist $\{3, 4, 5\}$ die Lösungsmenge von $G(x)$.

2.2 Verknüpfungen von Aussagen

Aussagen und Aussageformen können mit Hilfe **Boolscher Operatoren** zu neuen, zusammengesetzen Aussagen bzw. Aussageformen verknüpft werden.

Einer dieser Operatoren ist die sogenannte **Konjunktion**. Die Konjunktion zweier Aussagen A und B ist dann und nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind. Daher wird sie auch als Und-Verknüpfung bezeichnet. Formal wird die Konjunktion zweier Aussagen A und B durch den Ausdruck $A \wedge B$ (sprich: A und B) beschrieben.

Desweiteren ist die **Disjunktion** $A \vee B$ (sprich: A oder B) zweier Aussagen A und B dann und nur dann wahr, wenn A, B oder A und B wahr sein. Sie wird daher auch als Oder-Verknüpfung bezeichnet.

Für die Konjunktion, Disjunktion und Negation gilt nach dem Satz von De-Morgan:

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B},$$
$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

Beispiel 2.5: Seien die Aussagen A und B wahr und die Aussage C falsch.
a) Dann ist $A \wedge B$ wahr und $B \wedge C$ falsch.
b) Desweiteren ist $A \vee B$ wahr, $B \vee C$ wahr und $C \vee C$ falsch.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Tabelle 2.1: Wahrheitstafeln für Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz

c) Nach dem Satz von DeMorgan ist die Negation der Aussage 'Hans ist schön und klug' die Aussage 'Hans ist nicht schön oder nicht klug'.

Ein weiterer Boolscher Operator ist die **Implikation** oder auch Folgerung. Sie wird für zwei Aussagen A und B durch den Ausdruck $A \Rightarrow B$ (sprich: aus A folgt B) beschrieben und ist nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie wahr. Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist also identisch zur Aussage $\bar{A} \vee B$. A heißt auch **hinreichende Bedingung** für B, da bei gültiger Implikation $A \Rightarrow B$ die Aussage B wahr sein muß, wenn A wahr ist, und B **notwendige Bedingung** für A, da A überhaupt nur dann wahr sein kann, wenn B wahr ist.

Schließlich soll als letzte Verknüpfung noch die **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$ zweier Aussagen A und B vorgestellt werden. Sie ist dann und nur dann wahr, wenn entweder A und B beide wahr oder aber beide falsch sind. Sie ist, wie man leicht nachprüfen kann, gleichwertig zum Ausdruck $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Man kann den Wahrheitsgehalt zusammengesetzer Aussagen in Abhängigkeit vom Wahrheitsgehalt der einzelnen atomaren Aussagen sehr übersichtlich in sogenannten **Wahrheitstafeln** darstellen. In diesen werden tabellarisch alle möglichen Kombinationen von Wahrheitsgehalten aller in die zusammengesetze Aussage einfließenden atomaren Aussagen und der sich entsprechend ergebende Wahrheitsgehalt der zusammengesetzten Aussage zusammengefaßt. In Tabelle 2.1 sind Wahrheitstafeln für alle in diesem Abschnitt vorgestellten Verknüpfungen zusammengestellt.

Beispiel 2.6: Die Wahrheitstafel zur Aussage $A \vee (B \wedge \neg C)$, die aus Gründen der Übersichtlichkeit auch einige Teilaussagen der Gesamtaussage enthält, ist:

A	B	C	$\neg C$	$B \wedge \neg C$	$A \vee (B \wedge \neg C)$
w	w	w	f	f	w
w	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	f
f	f	w	f	f	f
w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	w
f	w	f	w	w	w
f	f	f	w	f	f

2.3 Quantifizierung von Aussageformen

In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, wie Aussageformen zu Aussagen werden, indem man ein Element ihrer jeweiligen Grundmenge in sie einsetzt. Eine weitere wichtige Art, Aussageformen in Aussagen zu überführen ist, diese zu quantifizieren.

Sei im weiteren $A(x)$ eine beliebige Aussageform mit der Grundmenge G und der Lösungsmenge $L \subseteq G$. Dann steht $\exists x.\, A(x)$ (sprich: es existiert ein x mit $A(x)$) für die Aussage, daß mindestens ein $x \in G$ existiert, für welches $A(x)$ wahr ist. Das Symbol $\exists$ ist dabei der sogenannte **Existenzquantor**. Desweiteren steht $\forall x.\, A(x)$ (sprich: für alle x gilt $A(x)$) für die Aussage, daß $A(x)$ für alle $x \in G$ wahr ist. Das Symbol $\forall$ ist dabei der sogenannte **Allquantor**.

Man beachte, daß $\exists x.\, A(x)$ genau dann wahr ist, wenn $L \neq \emptyset$ gilt, und das $\forall x.\, A(x)$ genau dann wahr ist, wenn $L = G$ gilt. Daraus ist leicht ersichtlich, daß $\exists x.\, A(x)$ immer wahr ist, wenn $\forall x.\, A(x)$ wahr ist. Formalisiert wird dieser Umstand in der Aussage $\forall x.\, A(x) \Rightarrow \exists x.\, A(x)$.

Beispiel 2.7: Sei $A(x) :=$ '$x > 3$' eine Aussageform mit der Grundmenge $G := \{1, 2, 3, 4\}$.
a) Dann ist $\exists x.\, A(x)$ eine wahre Aussage, da $4 > 3$ wahr ist,
b) und $\forall x.\, A(x)$ eine falsche Aussage, da beispielsweise $1 > 3$ falsch ist.

Bezüglich der Negation quantifizierter Aussageformen gelten die beiden folgenden Zusammenhänge:

$$\neg\forall x.\, A(x) \Leftrightarrow \exists x.\, \neg A(x)$$
$$\neg\exists x.\, A(x) \Leftrightarrow \forall x.\, \neg A(x)$$

Beispiel 2.8:
a) Die Verneinung der Aussage 'Alle Menschen sind sterblich' ist 'Es gibt einen Menschen, der nicht sterblich ist'.
b) Die Verneinung der Aussage 'Es existiert ein Tennisspieler, der nicht drin ist' ist 'Alle Tennisspieler sind drin'.

Kapitel 3

Arithmetik

In diesem Kapitel werden grundlegende Elemente aus dem Bereich der Arithmetik wiederholt, namentlich die vier Grundrechenarten und die Potenzrechnung nebst ihren Umkehrungen, dem Wurzelziehen und dem Logarithmieren. Zunächst aber werden die wichtigsten Zahlenbegriffe wiederholt.

3.1 Zahlenbegriffe

Die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$, die sich intuitiv bei Abzählvorgängen ergeben, werden **natürliche Zahlen** genannt. Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnet. Sie ist bezüglich der Addition und der Multiplikation **abgeschlossen**. Das heißt, daß die Addition und die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen in jedem Fall wiederum eine natürliche Zahl ergibt.

Erweitert man die Menge aller natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen $-1, -2, -3, \ldots$ und die 0, so erhält man die Menge der **ganzen Zahlen**. Diese Menge wird mit dem Symbol $\mathbb{Z}$ bezeichnet und ist zusätzlich bezüglich der Subtraktion abgeschlossen.

Zahlen, die sich als Quotient $\frac{a}{b}$ zweier beliebiger ganzer Zahlen a und b mit $b \neq 0$ darstellen lassen, heißen **rationale Zahlen**. Die Gesamtheit dieser Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{Q}$ bezeichnet und ist bezüglich aller vier Grundrechenarten abgeschlossen.

Als letzter Zahlenbegriff sollen an dieser Stelle noch die **reellen Zahlen** genannt werden. Sie umfassen neben allen rationalen Zahlen auch die sogenannten irrationalen Zahlen, welche sich nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen lassen.[1] Die Menge aller reellen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet und ist ebenfalls bezüglich aller vier Grundrechenarten abgeschlossen.

Offensichtlich gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; den reellen Zahlen liegt also der allgemeinste der vier hier aufgeführten Zahlenbegriffe zugrunde.

[1] Beispiele irrationaler Zahlen sind die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π.

In der Mathematik häufig auftretende Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die sogenannten **Intervalle**, welche in vier verschiedenen Formen auftreten: Für zwei beliebige reelle Zahlen a und b mit $a \leq b$ stellt

$$[a, b]$$

ein sogenanntes **geschlossenes** Intervall dar. Es beinhaltet alle reellen Zahlen x, welche die Bedingung $x \geq a \wedge x \leq b$ erfüllen.

$$(a, b)$$

ist hingegen ein sogenanntes **offenes** Intervall, welches alle reellen Zahlen x mit $x > a \wedge x < b$ enthält. Mischformen dieser beiden Arten von Intervallen sind das **linksoffene** Intervall $(a, b]$ und das **rechtsoffene** Intervall $[a, b)$, welche alle x mit $x > a \wedge x \leq b$ bzw. $x \geq a \wedge x < b$ enthalten.

Ist die untere Intervallgrenze $-\infty$ (sprich: minus Unendlich) oder aber die obere ∞ (sprich: Unendlich), so schreibt man mit $a \in \mathbb{R}$ als anderer Intervallgrenze $(-\infty, a]$ bzw. $[a, \infty)$ für das entsprechende abgeschlossene und $(-\infty, a)$ bzw. (a, ∞) für das entsprechende offene Intervall.

Man beachte, daß für Intervalle viele abweichende Schreibweisen gebräuchlich sind, so beispielsweise für geschlossene Intervalle (a, b) und für offene Intervalle $)a, b($. Man sollte sich daher bei der Lektüre eines mathematischen Textes immer versichern, welche Schreibweise in ihm Verwendung findet.

3.2 Die vier Grundrechenarten

Als die vier Grundrechenarten bezeichnet man die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Sie sind nachfolgend zusammen mit den für jede der Grundrechenarten spezifischen Bezeichnungen der beiden Operanden und des Ergebnisses angegeben:

Für die **Addition** $a + b = c$ gelten die folgenden Bezeichnungen:

Summand	plus	Summand	gleich	Summe
a	$+$	b	$=$	c

Für die **Subtraktion** $a - b = c$ gelten die folgenden Bezeichnungen:

Minuend	minus	Subtrahend	gleich	Differenz
a	$-$	b	$=$	c

Für die **Multiplikation** $a \cdot b = c$ gelten die folgenden Bezeichnungen:

Faktor	mal	Faktor	gleich	Produkt
a	$\cdot$	b	$=$	c

Dabei sind als Multiplikationszeichen alternativ statt '$\cdot$' auch '$\times$' oder '$\star$' gebräuchlich. Zudem wird üblicherweise auf die Verwendung eines Malzeichens verzichtet, ist mindestens einer der beiden Faktoren keine konstante Zahl, sondern etwa eine Variable. Man schreibt also ab für $a \cdot b$.

Für die **Division** $a : b = c$ gelten die folgenden Bezeichnungen:

Dividend	durch	Divisor	gleich	Quotient
a	$:$	b	$=$	c

Alternativ findet als Divisionszeichen statt ':' auch '/' Verwendung. Desweiteren werden Quotienten oftmals als **Brüche** geschrieben, also in der Form $\frac{a}{b}$ statt $a : b$. Wird ein Bruch betrachtet, so heißt der Dividend auch Zähler und der Divisor Nenner. Divisor bzw. Nenner müssen dabei ungleich Null sein. Anderenfalls ist das Ergebnis der Divison nicht definiert.

Für die Addition und die Multiplikation gilt das sogenannte **Kommutativgesetz**, welches besagt, daß

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

gilt. In diesem Zusammenhang beachte man, daß jede Subtraktion $a - b$ als eine Addition mit dem negativen Subtrahenden aufgefaßt werden kann, es ist also $a - b = a + (-b)$. Aus diesem Grund werden auch Differenzen im oben genannten Sinne üblicherweise und auch im folgenden als Summen bezeichnet. Desweiteren kann jede Divison $a : b$ als Multiplikation mit dem **Kehrwert**[2] $\frac{1}{b}$ des Divisors aufgefaßt werden, es gilt also $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$.

Möchte man eine Summe oder ein Produkt über n verschiedene, nur durch einen Index unterschiedene Summanden s_i bzw. Faktoren f_i bilden, so schreibt man dafür oft verkürzend

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=1}^{n} f_i.$$

Der Index i, der die einzelnen Summanden bzw. Faktoren unterscheidet, wird auch Laufvariable genannt.

Beispiel 3.1:
a) Es ist $\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.
b) Sei $f_1 := 2$, $f_2 := 4$ und $f_3 := 1$. Dann ist $\prod_{i=1}^{3} f_i = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$.

3.3 Klammerrechnung und die binomischen Formeln

Allgemein ergibt sich der Wert algebraischer Ausdrücke, in denen mehrere Zahlen durch unterschiedliche Grundrechenarten verknüpft werden, gemäß der Regel **'Punkt- vor Strichrechnung'**, die besagt, es seien zuerst die Multipli-

[2] Der Kehrwert jeder reellen Zahl ungleich Null ergibt sich, indem man 1 durch diese Zahl teilt. Für die Zahl Null existiert kein Kehrwert.

kationen und Divisionen und danach die Additionen und Subtraktionen auszuführen. Sollen zusammengesetze algebraische Ausdrücke von dieser Regel abweichend ausgewertet werden, so kann dieses durch die Verwendung von Klammern erreicht werden.

Beispiel 3.2:
a) $3 + 5 \cdot 8 = 43$ und $(3 + 5) \cdot 8 = 64$;
b) $20 : 2 + 2 = 12$ und $20 : (2 + 2) = 5$

Für das Rechnen mit Klammern sind die folgenden Termumformungsregeln sehr nützlich, welche sich unmittelbar aus dem sogenannten **Distributivgesetz**

$$a(b + c) = ab + ac$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ergeben:

In einer Summe kann eine Klammer, vor der ein '+' steht, weggelassen werden. Wird hingegen eine Klammer weggelassen, vor der ein '$-$' steht, so müssen die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer umgekehrt werden. Es gilt also $a + (b + c) = a + b + c$ und $a - (b - c) = a - b + c$. Die Termumformung des Weglassens von Klammern wird auch als das **Auflösen** von Klammern bezeichnet.

Desweiteren gilt, daß ein Produkt, dessen einer Faktor eine in Klammern stehende Summe ist, gleich der Summe der Produkte aus dem anderen Faktor und jeweils einem Summanden der in Klammern stehenden Summe ist.[3] Man bezeichnet diese Termumformung auch als **Ausmultiplizieren**. Die mehrfache Anwendung dieses Gesetzes erbringt, wie ein Produkt aus zwei beklammerten Summen ausmultipliziert werden kann: $(a+b)(c+d) = (a+b)c+(a+b)d = ac+bc+ad+bd$.

Als **Ausklammern** bezeichnet man schließlich die Umkehrung des Ausmultiplizierens. Ein in allen Summanden einer Summe enthaltener Faktor wird dabei aus der Summe herausgezogen.

Beispiel 3.3:
a) $2a+(3b+5a) = 2a+3b+5a = 7a+3b$ und $5a-(-3b-(5a-2b))-b = 10a$
b) $7a(3b + 4) = 21ab + 28a$ und $(a + 2)(b + 3c - 2d) = (a + 2)b + 3(a + 2)c - 2(a + 2)d = ab + 2b + 3ac + 6c - 2ad - 4d$
c) $12ac + 18bc = 6c(2a + 3b)$ und $2ab + 5a + 2b + 5 = (2ab + 5a) + (2b + 5) = (a + 1)(2b + 5)$

Soll eine in Klammern stehende Summe durch eine Zahl dividiert werden, so kann man sich zunutze machen, daß eine Division einer Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors entspricht. So gilt beispielsweise $(4ab+8bc) : 2b = (4ab+8bc) \cdot \frac{1}{2b} = 2a + 4c$.

Spezialfälle des Multiplizierens zweier beklammerter Summen stellen die **Binomischen Formeln** dar. Sie gelten, wenn die beiden beklammerten Summen

[3] Nichts anderes besagt schließlich das Distributivgesetz.

die Bauart $a + b$ oder $a - b$ haben, und damit sogenannte **Binome** sind. Wie man leicht nachprüfen kann, gilt:[4]

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Beispiel 3.4:
a) $(3a + 5b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$
b) $(7x - 2y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2$
c) $(9u + 3v)(9u - 3v) = 81u^2 - 9v^2$

3.4 Bruchrechnung

Bevor in diesem Abschnitt das Rechnen mit Brüchen bzw. mit rationalen Zahlen wiederholt werden kann, müssen zunächst einige Grundbegriffe der Zahlentheorie betrachtet werden, welche sich auschließlich auf die natürlichen Zahlen beziehen.

Ist eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ ohne Rest durch eine Zahl $b \in \mathbb{N}$ teilbar, ist also $a/b \in \mathbb{N}$, dann heißt a **Vielfaches** von b und b **Teiler** von a.

Beispiel 3.5: Die Zahlen 3 und 5 sind im Gegensatz zu 7 Teiler von 30. Die Zahl 12 ist ein Vielfaches von 4.

Die größten Zahl, die Teiler zweier gegebener Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ ist, heißt **größter gemeinsamer Teiler** dieser beiden Zahlen und wird mit dem Symbol $\mathrm{ggt}(a, b)$ bezeichnet. Die kleinste Zahl, die ein Vielfaches der beiden Zahlen ist, heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** und wird mit dem Symbol $\mathrm{kgv}(a, b)$ bezeichnet.

Beispiel 3.6:
a) Es ist $\mathrm{ggt}(21, 35) = 7$.
b) Es ist $\mathrm{kgv}(21, 35) = 105$.

Für die systematische Bestimmung größter gemeinsamer Teiler oder kleinster gemeinsamer Vielfacher ist das Instrument der **Primfaktorenzerlegung** sehr hilfreich. Es wird nachfolgend vorgestellt:

Eine Zahl aus der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen heißt **Primzahl**, wenn sie nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar ist. Die zehn kleinsten Primzahlen sind $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ und 29, keine Primzahlen sind beispielsweise die

[4]Zur Erinnerung: Für eine Multiplikation zweier gleicher Faktoren x schreibt man statt $x \cdot x$ üblicherweise x^2 (sprich: x Quadrat oder x hoch Zwei).

33 oder die 72, da beide Zahlen unter anderem ohne Rest durch 3 teilbar sind. Es ist möglich, jede natürliche Zahl als ein Produkt aus Primzahlen darzustellen. Diese Primzahlen, die für jede natürliche Zahl eindeutig bestimmt sind, heißen auch **Primfaktoren**

Beispiel 3.7:
a) $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$
b) $1540 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Um eine natürliche Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen, empfiehlt es sich, in aufsteigender Reihenfolge der Primzahlen beginnend mit 2 zu überprüfen, ob und wie oft die zu zerlegenden Zahl durch die gerade betrachtete Primzahl ohne Rest teilbar ist. Ist die zu zerlegende Zahl ohne Rest teilbar, so wird sie entsprechend oft durch die gerade betrachtete Primzahl geteilt, jene mit der entsprechenden Häufigkeit als Primfaktor vermerkt, und das Divisonsergebnis in gleicher Weise weiter zerlegt, bis dieses nicht mehr möglich ist, da es selbst eine Primzahl und damit der letzte der gesuchten Primfaktoren ist.

Beispiel 3.8:
a) Nachfolgend ist die Primfaktorenzerlegung der Zahl 1540 dargestellt:

$$\begin{aligned}
1540 &= 2 \cdot 770 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 385 \\
&\quad \text{(385 nicht ohne Rest durch 3 teilbar)} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 77 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \\
&\quad \text{(11 ist selbst eine Primzahl)}
\end{aligned}$$

b) Nachfolgend ist die Primfaktorenzerlegung der Zahl 2100 dargestellt:

$$\begin{aligned}
2100 &= 2 \cdot 1050 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 525 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 175 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \\
&\quad \text{(7 ist selbst eine Primzahl)}
\end{aligned}$$

Es gilt nun, daß der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ das Produkt aller Zahlen ist, die zugleich Primfaktor von a und b sind. Mehrfach auftretende Primfaktoren werden dabei so oft berücksichtigt, wie sie sowohl bei der Zerlegung von a als auch der von b mehrfach auftreten.

Beispiel 3.9: Dem nachfolgenden Schema ist zu entnehmen, wie mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung der größte gemeinsame Teiler von 1540 und 2100 bestimmt werden kann:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1540 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 5 & \cdot & & & 7 & \cdot & 11 & & \\
2100 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & \cdot & 5 & \cdot & 7 & & & & \\
\hline
\text{ggt} & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 5 & \cdot & & & 7 & & & = & 140
\end{array}$$

Also ist $\text{ggt}(1540, 2100) = 140$.

Desweiteren gilt, daß das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ das Produkt aller Zahlen ist, die Primfaktor von a oder von b sind. Mehrfach auftretende Primfaktoren werden dabei so oft berücksichtigt, wie sie bei der Zerlegung von a und b am häufigsten auftreten.

Beispiel 3.10: Dem nachfolgenden Schema ist zu entnehmen, wie mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung das kleinste gemeinsame Vielfache von 1540 und 2100 bestimmt werden kann:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1540 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 5 & \cdot & & & 7 & \cdot & 11 & & \\
2100 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & \cdot & 5 & \cdot & 7 & & & & \\
\hline
\text{kgv} & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & \cdot & 5 & \cdot & 7 & \cdot & 11 & = & 23100
\end{array}$$

Also ist $\text{kgv}(1540, 2100) = 23100$.

Ein **Bruch** ist die Darstellung einer rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ als Quotient zweier ganzer Zahlen, also in der Form $q = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$, wobei z auch **Zähler** und n **Nenner** des Bruchs heißt. Es gilt, daß die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch nie eindeutig ist, da beispielsweise durch die Multiplikation des Zählers und des Nenners eines Bruchs $\frac{z}{n}$ mit einer beliebigen Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{mz}{mn}$ eine weitere Darstellung derselben rationalen Zahl als Bruch gewonnen werden kann. Die Multiplikation des Zählers und des Nenners eines Bruchs mit derselben ganzen Zahl m bezeichnet man auch als **Erweitern** des Bruchs um m. Dividiert man hingegen Zähler z und Nenner n eines Bruchs durch dieselbe ganzen Zahl m, wobei m Teiler von z und n sein muß, so wird diese Operation, die den Wert des Bruchs gleichfalls nicht verändert, als **Kürzen** durch m bezeichnet. Dabei ist aus Gründen der Übersichtlichkeit das Kürzen eines Bruchs durch den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner besonders sinnvoll.

Beispiel 3.11:
a) Das Erweitern von $\frac{6}{5}$ mit 3 ergibt $\frac{18}{15}$.
b) Das Kürzen von $\frac{12}{16}$ um 4 ergibt $\frac{3}{4}$.

Zwei Brüche werden miteinander **multipliziert**, indem man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner teilt. Zwei Brüche werden durcheinander dividiert, indem man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert. Als **Kehrwert** eines Bruchs $\frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$ wird dabei der Bruch $\frac{n}{z}$ bezeichnet.

Beispiel 3.12:
a) Es ist $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{35}$ und $\frac{9}{7} \cdot \frac{2}{8} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$.
b) Es ist $\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{28}$.

Zwei Brüche mit übereinstimmenden Nennern werden **addiert**, indem man ihre Zähler addiert und durch den gemeinsamen Nennder dividiert. Es gilt also

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zwei Brüche mit verschiedenen Nennern müssen hingegen erst in der Art erweitert werden, daß ihre beiden Nenner übereinstimmen, bevor sie dann wie eben beschrieben addiert werden können. Es bietet sich dabei an, die beiden Nenner jeweils so zu erweitern, daß als neuer gemeinsamer Nenner deren kleinstes gemeinsames Vielfaches fungiert.

Beispiel 3.13: Es ist $\frac{3}{7} + \frac{3}{2} = \frac{6}{14} + \frac{21}{14} = \frac{27}{14}$ und $\frac{at}{x} + \frac{1}{bx} = \frac{abt}{bx} + \frac{1}{bx} = \frac{abt+1}{bx}$.

3.5 Potenzen und Wurzeln

Das n-fache Produkt

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$$

einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit sich selbst wird als die n-te **Potenz** dieser Zahl bezeichnet. Dabei heißt a auch **Basis** und n **Exponent** der Potenz. Man schreibt dafür a^n.

Der Potenzbegriff wird über die Definition $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf ganzzahlige Exponenten kleiner Null erweitert und mit der Festsetzung $a^0 := 1$ für $a \neq 0$ schließlich auf alle ganzzahligen Exponenten ausgedehnt.[5]

Für das Rechnen mit Potenzen gelten einige Regeln, die nachfolgend für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ zusammengestellt sind:

$$\begin{array}{rcll} a^n a^m & = & a^{n+m} & \\ \frac{a^n}{a^m} & = & a^{n-m} & ; a \neq 0 \\ a^n b^n & = & (ab)^n & \\ \frac{a^n}{b^n} & = & \left(\frac{a}{b}\right)^n & ; b \neq 0 \\ (a^n)^m & = & a^{nm} & \end{array}$$

Beispiel 3.14:
a) Es ist $3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$.

[5] Der Ausdruck 0^0 ist nicht definiert.

b) Es ist $\frac{5^2}{5^4} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25}$.
c) Es ist $4^2 \cdot 6^2 = (4 \cdot 6)^2 = 24^2 = 576$.
d) Es ist $\left(2^2\right)^3 = 2^6 = 64$.

Für die Potenz $a^n = b$ mit $b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt a auch n-te **Wurzel** aus b und man schreibt $a = \sqrt[n]{b}$ für $n \neq 2$ und einfach nur $a = \sqrt{b}$ für $n = 2$.[6] Das sogenannte Ziehen einer Wurzel ist somit eine Operation, die das Bilden einer Potenz umkehrt.

Wurzelausdrücke werden auch als Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten interpretiert, indem

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}.$$

festgesetzt wird. Die nachfolgende Rechnung, welche die oben angegebenen Potenzrechenregeln rein formalistisch auf nicht ganzzahlige Exponenten überträgt, macht die Sinnhaftigkeit einer solchen Festsetzung deutlich:

$$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{1/n} = a^{n/n} = a$$

Allgemein gelten die oben angegebenen Pozenzrechenregeln alle analog, sodaß für das Rechnen mit Wurzeln mit $a, b \geq 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} & = & \sqrt[n]{ab} \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & = & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \\ \sqrt[n]{a^m} & = & (\sqrt[n]{a})^m \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} & = & \sqrt[nm]{a} \end{array}$$

Beispiel 3.15:
a) Es ist $\sqrt{16} = 16^{1/2} = 4$.
b) Es ist $\sqrt[4]{x^{12}y^8} = \left(x^{12}y^8\right)^{1/4} = \left(x^{12}\right)^{1/4}\left(y^8\right)^{1/4} = x^{12/4}y^{8/4} = x^3y^2$.
c) Es ist $\sqrt[m]{x\sqrt[n]{y}} = \left(xy^{1/n}\right)^{1/m} = x^{1/m}y^{1/mn}$.

3.6 Logarithmen

Mit dem Wurzelziehen wurde im vorangegangenen Abschnitt eine Operation behandelt, welche das Bilden einer Potenz umkehrt. Eine weitere Umkehrung des Potenzierens ist das sogenannte Logarithmieren.

Für die Potenz $a^y = x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt y auch **Logarithmus** von x zur **Basis** a. Man schreibt dafür $y = \log_a x$. Der Logarithmus einer Zahl x zur Basis a ist also diejenige Zahl y, mit der a potenziert werden muß, um x zu erhalten.

[6] Dabei wird b auch als Radikant bezeichnet.

Besondere Basen sind in diesem Zusammenhang 10 und die Eulersche Zahl $e \approx 2,718281828$, die insbesondere für Wachstumsprozesse von Bedeutung ist. Ein Logarithmus zur Basis 10 wird üblicherweise einfach nur mit $\log x$, ein Logarithmus zur Basis e mit $\ln x$ (für 'logarithmus naturalis') bezeichnet.

Beispiel 3.16:
a) Es ist $\log 100 = 2$.
b) Es ist $\log_2 64 = 6$.
c) Es ist $\ln 1 = 0$.

Auch für das Rechnen mit Logarithmen gelten einige Regeln, die alle nachfolgend für $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ und $x, y > 0$ zusammengestellt sind:

$$\begin{aligned} \log_b x &= \tfrac{\log_a x}{\log_a b} \\ \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a(x/y) &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a(x^y) &= y \log_a x \end{aligned}$$

Beispiel 3.17:
a) Es ist $\log(100 \cdot 1000^2) = \log 100 + \log(1000^2) = \log 100 + 2 \log 1000 = 2 + 2 \cdot 3 = 8$.
b) Es ist $\frac{2}{7} \log x + \frac{3}{7} \log y - \frac{5}{7} \log z = \frac{1}{7} \left(\log(x^2) + \log(y^3) - \log(z^5)\right) = \frac{1}{7} \log\left(\frac{x^2 y^3}{z^5}\right)$.

Man beachte, daß der Logarithmus nur für Zahlen größer als Null gebildet werden kann; für alle Zahlen kleiner oder gleich Null ist er nicht definiert.

3.7 Einiges zum Summenzeichen

Der Umgang mit dem Summenzeichen bereitet manchmal Probleme. Das muss aber nicht sein, wenn man die folgenden Rechenregeln und Tricks kennt (mit $l, m, n \in \mathbb{Z}$):

1. $$\sum_{k=m}^{n} (\lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k) = \lambda \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \cdot \sum_{k=m}^{n} b_k, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. Ist $a_k = c$ für alle k, so hat man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1) \cdot c$$

3.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{n} a_k$$

4.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-l}^{n-l} a_{k+l} = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l} \quad \text{(Indextransformation)}$$

Am besten macht man sich diese Tricks mittels geeigneter Beispiele klar.

Um noch eine weitere Anwendung zu sehen, betrachten wir die folgende, durchaus etwas besondere Summe:

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot r^{i-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}.$$

Hierbei nennt man die einzelnen Summanden a, ar, ar^2 etc. eine **geometrische Zahlenfolge**. Man kann recht einfach zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot r^{i-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = a\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Dazu bildet man die Differenz $rS - S$, wobei S als Variable für unsere gesuchte Summe $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ steht. Man bekommt

$$rS - S = ar^n - a.$$

Der Trick besteht hier darin, zu erkennen, welche Summenglieder bei der Operation $rS - S$ rausfallen, da sie sowohl in der Summe S als auch in der Summe rS enthalten sind. Da man ja wissen möchte, wie gross S ist, löst man die Gleichung nach S und bekommt

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot r^{i-1} = S = a\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Zur Übung sei empfohlen, sich zu überlegen, wie man von der Summe

$$\sum_{i=m}^{n} a \cdot r^{i-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$$

auf

$$\sum_{i=m}^{n} a \cdot r^{i-1} = a\frac{r^n - r^{m-1}}{r - 1}$$

kommt.

Kapitel 4

Gleichungen mit einer Unbekannten

In diesem Kapitel werden die unterschiedlichen Arten von Gleichungen und das Auflösen von Bestimmungsgleichungen wiederholt.

4.1 Arten von Gleichungen

Grundsätzlich werden vier Arten von Gleichungen unterschieden:

Identische Gleichungen beschreiben wahre mathematische Aussagen wie etwa $2 + 2 = 4$ oder $a + b = b + a$. Sie wurden in diesem Skriptum bereits sehr häufig verwendet.

Funktionsgleichungen beschreiben einen Zusammenhang zwischen zwei variablen Größen. Bezeichnet beispielsweise r den Radius eines Kreises und F die Fläche, so gibt die Funktionsgleichung $F = \pi r^2$ den Zusamenhang zwischen diesen beiden Größen an.

Über **Definitionsgleichungen** wird ein Symbol als Bezeichner eines komplexeren mathematischen Ausdrucks festgelegt. Beispielsweise wird über die Definitionsgleichung $p := (3q - 5)^2 - 4$ dem Symbol p per Definition der Wert von $(3q - 5)^2 - 4$ zugewiesen. Man beachte, daß in Definitionsgleichungen anstelle des Gleichheitszeichens das Symbol := Verwendung findet.

Schließlich existieren noch die sogenannten **Bestimmungsgleichungen**, deren konstitutives Merkmal ist, daß sie jeweils eine Variable enthalten, deren Wert unbekannt ist. Eine solche Variable, deren Wert grundsätzlich jede reelle Zahl sein kann, wenn nicht ausdrücklich anderes gefordert wird, heißt daher **Unbekannte**. Allerdings sind über eine Bestimmungsgleichung die tatsächlichen möglichen Werte ihrer Unbekannten implizit festgelegt, nämlich als diejenigen Werte, für die die Bestimmungsgleichung eine wahre Aussage und somit eine identische Gleichung liefert. Eine Bestimmungsgleichung kann also als eine Aussageform aufgefaßt werden, deren Lösungsmenge die Menge der Werte ist, die die Unbekannte in der Bestimmungsgleichung annehmen kann, damit eine wahre Aussage entsteht.

Beispiel 4.1:
a) Sei $3x + 4 = 10$ eine Bestimmungsgleichung mit x als Unbekannter. Dann ist, wie man durch Einsetzen in die Bestimmungsgleichung leicht feststellt, der Wert von x implizit als 2 festgelegt. Die Lösungsmenge der betrachteten Bestimmungsgleichung ist also $\{2\}$.
b) Sei $2b^2 = 18$ eine Bestimmungsgleichung mit b als Unbekannter. Dann ist, wie man wiederum durch Einsetzen feststellt, der Wert von b implizit als 3 oder als -3 festgelegt. Die Lösungsmenge ist also $\{3, -3\}$.
c) Sei $5b = x$ eine Bestimmungsgleichung mit b als Unbekannter. Dann ist der Wert von b implizit als $x/5$ festgelegt, und die Lösungsmenge ist $\{x/5\}$.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden nur noch Bestimmungsgleichungen betrachtet.

4.2 Äquivalente Umformung von Gleichungen

Natürlich ist die Lösungsmenge einer Bestimmungsgleichung nicht immer unmittelbar erkennbar. In diesen Fällen gilt es, die Bestimmungsgleichung mit Hilfe geeigneter Rechenoperationen gegebenenfalls in mehreren Schritten so lange umzuformen, bis die Unbekannte auf einer Seite isoliert ist und die Lösungsmenge damit leicht bestimmt werden kann. Man sagt dann, die Gleichung sei nach der Unbekannten **aufgelöst**. Geeignete Rechenoperationen sind dabei neben gewöhnlichen Termumformungen die sogenannten Äquivalenzumformungen.

Eine **Äquivalenzumformung** einer Bestimmungsgleichung ist dabei dadurch gekennzeichnet, daß sie die Lösungsmenge dieser Gleichung nicht verändert. Dieses ist beispielsweise bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der bzw. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Bestimmungsgleichung der Fall. Lediglich die Multiplikation mit 0 ist keine Äquivalenzumformung.

Beispiel 4.2:
a) Sei $5x-(5-2x) = 3x+7$ eine Bestimmungsgleichung mit x als Unbekannter. Dann erbringt die folgende Kette von Term- und Äquivalenzumformungen,

$$\begin{aligned}
5x - (5 - 2x) &= 3x + 7 && |\,\text{Auflösen der Klammer}\\
5x - 5 + 2x &= 3x + 7 && |\,\text{Zusammenfassen der } x\text{-Glieder}\\
7x - 5 &= 3x + 7 && |\,-3x\\
4x - 5 &= 7 && |\,+5\\
4x &= 12 && |\,:4\\
x &= 3 && |\,\text{Gleichung aufgelöst,}
\end{aligned}$$

daß $\{3\}$ die Lösungsmenge dieser Bestimmungsgleichung ist.
b) Sei $\frac{2}{x-1} = \frac{4}{x+1}$ eine Bestimmungsgleichung mit x als Unbekannter und gelten

zusätzlich die Forderungen $x \neq 1$ und $x \neq -1$. Dann erbringt die folgende Kette von Term- und Äquivalenzumformungen,

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{x-1} &= \tfrac{4}{x+1} && |\cdot(x-1)\\
2 &= \tfrac{4(x-1)}{x+1} && |\cdot(x+1)\\
2(x+1) &= 4(x-1) && |\,\text{Ausmultiplizieren der Klammern}\\
2x+2 &= 4x-4 && |-2x\\
2 &= 2x-4 && |+4\\
6 &= 2x && |:2\\
3 &= x && |\,\text{Gleichung aufgelöst,}
\end{aligned}$$

daß $\{3\}$ die Lösungsmenge dieser Bestimmungsgleichung ist. Man beachte, daß die beiden Multiplikationen der Bestimmungsgleichung mit $x-1$ bzw. $x+1$ Äquivalenzumformungen sind, da nach Voraussetzung $x \neq 1$ und $x \neq -1$ gilt und somit nicht mit 0 multipliziert wird, was unzulässig wäre.

4.3 Lösung nichtlinearer Gleichungen

Obgleich mit den im vorangehenden Abschnitt vorgestellten, auf den vier Grundrechenarten basierenden Äquivalenzumformungen bereits viele in der wirtschaftswissenschaftlichen Praxis auftretenden Gleichungen aufgelöst werden können, existieren Arten von Gleichungen, für die dieses nicht zutrifft. In diesem Abschnitt werden einige solcher Gleichungen behandelt und geeignete Lösungsverfahren vorgestellt.

Eine Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$ und x als Variable heißt **quadratische Gleichung**. Eine deartige Gleichung hat entweder keine, eine oder zwei Lösungen, welche sich mit Hilfe der sogenannten **pq-Formel**

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ermitteln lassen. Diese Formel besagt, daß die oben angegebene quadratische Gleichung für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ zwei Lösungen hat, nämlich

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ eine Lösung, nämlich

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

und für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ keine Lösung, da die Wurzel einer negativen Zahl nicht definiert ist.[1]

[1] Tatsächlich ist die Wurzel einer negativen reellen Zahl eine sogenannte komplexe Zahl. Auf komplexe Zahlen wird im Rahmen dieses Kurses jedoch nicht eingegangen.

Beispiel 4.3:
a) Die Gleichung $x^2 + 2x - 15 = 0$ hat nach der pq-Formel $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+15} = -1 \pm 4$ die Lösungsmenge $\{3, -5\}$.
b) Die Gleichung $x^2 + 4x + 10 = 0$ hat nach der pq-Formel $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-10}$ keine Lösung, da $\sqrt{-6}$ nicht definiert ist.

Gegebenenfalls ist es erforderlich, eine quadratische Gleichung über einige Äquivalenzumformungen in die entsprechende, oben gegebene Form zu bringen, bevor die pq-Formel auf sie angewendet werden kann.

Eine Gleichung der Form

$$x^a = b$$

mit $a \neq 0$, $b > 0$ und $x > 0$ als Variable heißt **Potenzgleichung**. Eine Lösung einer solchen Gleichung ist immer

$$x = \sqrt[a]{b} = b^{1/a}.$$

Ist der Exponent a eine gerade ganze Zahl, so ist darüberhinaus $x = -\sqrt[a]{b}$ eine Lösung. Ist der Exponent a eine ungerade ganze Zahl, so kann auch ein $b < 0$ zugelassen werden, und es ist $x = -\sqrt[a]{-b}$ die einzige Lösung der Exponentialgleichung.

Beispiel 4.4:
a) Die Lösung der Gleichung $x^{1/8} = 3$ ist $x = \sqrt[1/8]{3} = 3^8 = 6561$.
b) Die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 = 81$ ist $\{3, -3\}$.
c) Die Lösung von $x^3 = -8$ ist $x = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Eine Gleichung der Form

$$a^x = b$$

mit $a, b > 0$, $a \neq 1$ und x als Variable heißt **Exponentialgleichung**. Ihre Lösung ist

$$x = \frac{\ln b}{\ln a},$$

wie nachfolgend unter Ausnutzung der Tatsache, daß das Logarithmieren einer Bestimmungsgleichung, deren linke und rechte Seite beide größer als 0 sind, eine Äquivalenzumformung ist, gezeigt wird:

$$\begin{aligned} a^x &= b & &|\,\ln \\ \ln a^x &= \ln b & &|\,\text{Potenzrechengesetz} \\ x \ln a &= \ln b & &|\,\ln \\ x &= \tfrac{\ln b}{\ln a} & &|\,\text{Gleichung aufgelöst.} \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Division durch $\ln a$ wegen $a \neq 1$ immer zulässig ist.

Kapitel 5

Ungleichungen mit einer Unbekannten

In diesem Kapitel werden Techniken zur Bestimmung der Lösungsmengen von Ungleichungen wiederholt.

5.1 Grundbegriffe

Ähnlich wie verschiedene Arten von Gleichungen existieren, gibt es auch mehrere Arten von Ungleichungen, so unter anderem identischen Gleichungen ähnliche, die eine wahre Aussage beschreiben, wie etwa $2 > 1$ und $x + 10 > x$.

Desweiteren existieren noch solche Ungleichungen, die eine enge Verwandtschaft zu den Bestimmungsgleichungen aufweisen. Auch ihr herausragendes Merkmal ist, daß sie jeweils eine unbekannte Variable enthalten, deren tatsächlich mögliche Werte unbekannt, aber durch die Ungleichung implizit festgelegt sind, nämlich als diejenige Werte, für die die Ungleichung eine wahre Aussage ergibt. Auch eine solche Ungleichung kann also als eine Aussageform aufgefaßt werden, deren Lösungsmenge die Menge all der Werte ist, die die Unbekannte in der Ungleichung annehmen kann, damit jene eine wahre Aussage wird. Der einzige Unterschied zwischen Bestimmungsgleichungen und -ungleichungen besteht darin, daß bei letzteren an der Stelle des Gleichheitszeichens eine der Relationen $>, \geq, \leq, <, \neq$ steht.

Beispiel 5.1:
a) Die Lösungsmenge der Ungleichung $2x \geq 8$ mit x als Unbekannter ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer oder gleich 4 sind, also das Intervall $[4, \infty)$.
b) Die Lösungsmenge der Ungleichung $x + 1 < 0$ mit x als Unbekannter ist die Menge aller reellen Zahlen, die kleiner als -1 sind, also das Intervall $(-\infty, -1)$.

Auch für Ungleichungen existieren Umformungen, die es ermöglichen, eine Ungleichung in eine andere Ungleichung mit derselben Lösungsmenge zu überführen, und die somit wie die im vorangegangenen Kapitel behandelten Äquivalenzumformungen für Gleichungen sehr nützlich dafür sind, die Lösungsmenge einer Ungleichung zu bestimmen, indem mit ihrer Hilfe die Ungleichung nach der Unbekannten aufgelöst wird. Die wichtigsten dieser Umformungen sind nachfolgend für $a, b, c \in \mathbb{R}$ zusammengestellt:

$$\begin{array}{rcl} a < (\leq)\, b & \Rightarrow & b > (\geq)\, a \\ a < (\leq)\, b & \Rightarrow & a + c < (\leq)\, b + c \\ a < (\leq)\, b \,\wedge\, c > 0 & \Rightarrow & ca < (\leq)\, cb \\ a < (\leq)\, b \,\wedge\, c < 0 & \Rightarrow & ca > (\geq)\, cb \end{array}$$

Man beachte, daß die Multiplikation einer Ungleichung mit einem Faktor $c \in \mathbb{R}$, dessen Vorzeichen nicht bekannt ist, eine **Fallunterscheidung** für $c > 0$ und $c < 0$ erforderlich macht.

Um die Lösungsmenge L_U einer Ungleichung der Form $a \neq b$ mit a und b als beliebige Terme, die eine unbekannte Variable enthalten, zu bestimmen, empfiehlt es sich, zunächst die Lösungsmenge L_G der Gleichung $a = b$ zu ermitteln. Es gilt dann $L_U = \mathcal{C}_{\mathbb{R}} L_G$.

Beispiel 5.2:
a) Die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 5 \geq 6x - (2x + 3)$ mit x als Unbekannter ist, wie die Kette

$$\begin{array}{ll} 3x - 5 \geq 6x - (2x + 3) & |\,\text{Auflösen der Klammer} \\ 3x - 5 \geq 6x - 2x - 3 & |\,\text{Zusammenfassen der } x\text{-Glieder} \\ 3x - 5 \geq 4x - 3 & |\,+3 \\ 3x - 2 \geq 4x & |\,-3x \\ \quad -2 \geq x & |\,\text{Ungleichung aufgelöst} \end{array}$$

von Umformungen erbringt, das Intervall $(-\infty, -2]$.
b) Um die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{5}{x} \leq 1$ mit x als Unbekannter, an welche zusätzlich die Forderung $x \neq 0$ erhoben wird, zu bestimmen, wird zunächst der Fall $x > 0$ betrachtet. Die Multiplikation der Ungleichung mit x führt dann auf die Ungleichung $5 \leq x$. Also ist die Lösungsmenge der urpsrünglichen Ungleichung für $x > 0$ das Intervall $L_1 = [5, \infty)$. Für den Fall $x < 0$ führt die Multiplikation der Ungleichung mit x hingegen auf die Ungleichung $5 \geq x$. Die Lösungsmenge der urpsrünglichen Ungleichung ist folglich für $x < 0$ das Intervall $L_2 = (-\infty, 0)$, und die gesamte Lösungsmenge ist $L = L_1 \cup L_2$.

5.2 Lösung nichtlinearer Ungleichungen

Es existieren Arten von Ungleichungen, welche mit dem im vorangegangenen Abschnitt behandelten Instrumentarium allein nicht gelöst werden können. In diesem Abschnitt werden nun für einige solcher Ungleichungen Lösungsverfahren vorgestellt.

Eine Ungleichung der Form

$$|a| < b, \quad |a| \leq b, \quad |a| > b \quad |a| \geq b \quad \text{oder} \quad |a| \neq b$$

mit a und b als beliebige Terme, die eine unbekannte Variable enthalten, heißt **Ungleichung mit Absolutbetrag**. Ist die Lösungsmenge einer solchen Ungleichung zu bestimmen, sind die nachfolgenden Äquivalenzen sehr hilfreich:

$$\begin{array}{lccc}
1. & |a| < b & \Leftrightarrow & a < b \wedge -a < b \\
2. & |a| \leq b & \Leftrightarrow & a \leq b \wedge -a \leq b \\
3. & |a| > b & \Leftrightarrow & a > b \vee -a > b \\
4. & |a| \geq b & \Leftrightarrow & a \geq b \vee -a \geq b \\
5. & |a| \neq b & \Leftrightarrow & a \neq b \wedge -a \neq b
\end{array}$$

Diese Äquivalenzen besagen, daß man, um die Lösungsmenge L einer Ungleichung mit Absolutbetrag zu bestimmen, die Lösungsmengen L_1 und L_2 zweier geeignet gewählter Ungleichungen ohne Absolutbetrag bestimmen kann, und dann in den Fällen 1, 2 und 5 über die Beziehung $L = L_1 \cap L_2$ und in den Fällen 3 und 4 über die Beziehung $L = L_1 \cup L_2$ die Lösungsmenge der Ungleichung mit Absolutbetrag erhält.

Beispiel 5.3:
a) Die Ungleichung $x \leq |5 - x|$ ist (nach 4.) äquivalent zu

$$\underbrace{x \leq 5 - x}_{U_1:=} \vee \underbrace{x \leq -(5 - x)}_{U_2:=}.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung U_1 ist, wie die Kette

$$\begin{array}{ll}
x \leq 5 - x & |\, +x \\
2x \leq 5 & |\, : 2 \\
x \leq 5/2 & |\, \text{Ungleichung aufgelöst}
\end{array}$$

von Äquivalenzumformungen erbringt, $L_1 = (-\infty, 5/2]$. Die Lösungsmenge der Ungleichung U_2 ist, wie die Kette

$$\begin{array}{ll}
x \leq -(5 - x) & |\, \text{Klammer auflösen} \\
x \leq -5 + x & |\, -x \\
0 \leq -5 & |\, \text{Falsche Aussage}
\end{array}$$

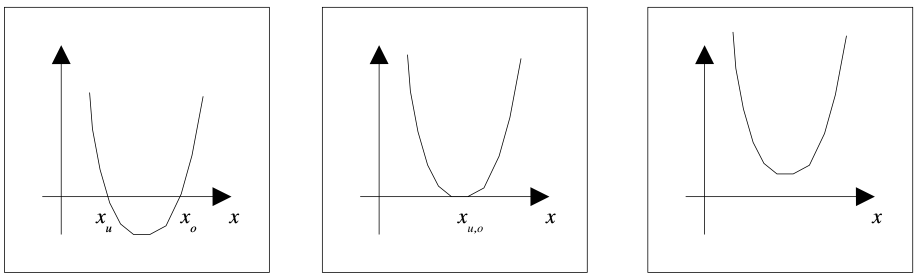
von Äquivalenzumformungen erbringt, $L_2 = \emptyset$. Die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung ist also $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/2]$.
b) Die Ungleichung $|6 - x| < 8$ ist (nach 1.) äquivalent zu

$$\underbrace{6 - x < 8}_{U_1:=} \wedge \underbrace{-(6 - x) < 8}_{U_2:=}.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung U_1 ist, wie man leicht nachrechnet, das offene Interval $L_1 = (-2, \infty)$, die Lösungsmenge der Ungleichung U_2 das offene

ρ	Fall (a): 2 Lösungen x_u, x_o	Fall (b): 1 Lösung $x_{u,o}$	Fall (c): keine Lösung
$>$	$(-\infty, x_u) \cup (x_o, \infty)$	$\mathbb{R} \setminus \{x_{u,o}\}$	$\mathbb{R}$
$\geq$	$(-\infty, x_u] \cup [x_o, \infty)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\leq$	$[x_u, x_o]$	$\{x_{u,o}\}$	$\emptyset$
$<$	(x_u, x_o)	$\emptyset$	$\emptyset$
$\neq$	$\mathbb{R} \setminus \{x_u, x_o\}$	$\mathbb{R} \setminus \{x_{u,o}\}$	$\mathbb{R}$

Tabelle 5.1: Lösungsmengen quadratischer Ungleichungen



(a) (b) (c)

Abbildung 5.1: Die drei Fälle beim Lösen quadratischer Ungleichungen

Intervall $L_2 = (-\infty, 14)$. Die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung ist also $L = L_1 \cap L_2 = (-2, 14)$.

Eine Ungleichung der Form

$$x^2 + px + q \,\rho\, 0,$$

wobei ρ für eine der Relationen $>, \geq, \leq, <$ oder $\neq$ steht, heißt **quadratische Ungleichung**. Um eine solche Ungleichung zu lösen, sind zunächst etwa mittels der in Abschnitt 4.3 vorgestellten pq-Formel alle Lösungen der von der quadratischen Ungleichung abgeleiteten Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zu bestimmen. Bekanntlich besitzt eine deartige Gleichung entweder zwei Lösungen x_u und x_o (Fall a), wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_u < x_o$ gelte, eine Lösung $x_{u,o}$ (Fall b) oder keine Lösung (Fall a). Die Lösungsmenge der quadratischen Ungleichung ergibt sich nun in Abhängigkeit von den Lösungen der quadratischen Gleichung und der Relation ρ gemäß Tabelle 5.1.

Die in Tabelle 5.1 zusammengestellten Ergebnisse werden in Abbildung 5.1 veranschaulicht, in welcher für die drei Fälle (a), (b) und (c) jeweils eine durch eine entsprechende quadratische Gleichung beschriebene Parabel dargestellt ist.

Beispiel 5.4:
a) Die zur quadratischen Ungleichung $x^2 - x - 2 \leq 0$ gehörende Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ hat nach der pq-Formel die beiden Lösungen $x_u = -1$ und $x_o = 2$ mit $x_u < x_o$. Dann ist die Lösungsmenge der betrachteten quadratischen Ungleichung das geschlossene Interval $[-1, 2]$.
b) Die zur quadratischen Ungleichung $x^2 - 11x + 24 > 0$ gehörende Gleichung $x^2 - 11x + 24 = 0$ hat nach der pq-Formel die beiden Lösungen $x_u = 3$ und $x_o = 8$. Dann ist $(-\infty, 3) \cup (8, \infty)$ die Lösungsmenge der betrachteten quadratischen Ungleichung.
c) Die quadratische Ungleichung $x^2 + 1 \leq 0$ hat, wie man leicht erkennt, keine Lösung. Ihre Lösungsmenge ist daher $\emptyset$.

Kapitel 6

Gleichungs- und Ungleichungssysteme

In den Kapiteln 4 und 5 wurde erläutert, wie für Bestimmungsgleichungen und -ungleichungen mit einer Unbekannten die sogenannte Lösungsmenge ermittelt werden kann. In diesem Kapitel wird nun die Beschränkung, daß eine Gleichung bzw. Ungleichung nur eine Unbekannte haben kann, fallen gelassen, und der darauf aufbauende Begriff des Gleichungs- bzw. Ungleichungssystems behandelt.

6.1 Grundbegriffe

Auch Bestimmungsgleichungen- oder ungleichungen mit $n \in \mathbb{N}$ Unbekannten sind Aussageformen, haben allerdings im Gegensatz zu Bestimmungsgleichungen- oder ungleichungen mit nur einer Unbekannten nicht die Menge $\mathbb{R}$ sondern die Menge $\mathbb{R}^n$ zur Grundmenge. Infolgedessen sind bei der Bestimmung ihrer Lösungsmenge nicht nur reelle Zahlen, sondern n-Tupel reeller Zahlen zu untersuchen.

Beispiel 6.1:
a) Die Bestimmungsgleichung $4x_1 + 2x_2 = 6$ mit x_1 und x_2 als Unbekannten hat, wie man etwa durch einsetzen leicht nachprüft, die Menge $\{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 = 3 - 2x_1\}$ als Lösungsmenge.
b) Die Lösungsmenge der Bestimmungsungleichung $x_1 x_2 > 0$ mit x_1 und x_2 als Unbekannten enthält all jene Tupel (x_1, x_2) für die gilt, daß x_1 und x_2 beide ungleich Null sind und das gleiche Vorzeichen haben.

Zum Begriff des **Gleichungs- bzw. Ungleichungssystems** gelangt man, indem man mehrere Bestimmungsgleichungen und -ungleichungen betrachtet, die dieselben Variablen enthalten. Die Fragestellung ist nun, welche n-Tupel jede dieser Gleichungen oder Ungleichungen erfüllen. Die Gesamtheit dieser n-Tupel heißt auch Lösungsmenge L des Gleichungs- bzw. Ungleichungssystems. Man kann sie für ein System von Gleichungen oder Ungleichungen $A_1(x), \ldots, A_k(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ bestimmen, indem man zunächst deren jeweilige Lösungsmenge L_i mit $i = 1, \ldots, k$ ermittelt. Es ist dann $L = L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_k$.

Beispiel 6.2: Die beiden Gleichungen $x_1 + x_2 = 0$ und $x_1 - x_2 = 0$ bilden gemeinsam ein Gleichungssystem. Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist $L_1 = \{(x_1, x_2)|x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 = -x_1\}$, die Lösungsmenge der zweiten Gleichung ist $L_2 = \{(x_1, x_2)|x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 = x_1\}$. Folglich ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $L = L_1 \cap L_2 = \{(0, 0)\}$.

Selbstverständlich können auch Systeme auftreten, die sowohl Gleichungen als auch Ungleichungen enthalten. Das oben gesagte gilt für deartige Systeme analog.

6.2 Lineare Gleichungssysteme

Gleichungssysteme, deren Einzelgleichungen alle in jeder Unbekannten linear sind, heißen **lineare Gleichungssyteme**. Derartige Gleichungssysteme treten sehr häufig auf und sind aufgrund ihrer einfachen Struktur sehr leicht lösbar. Dabei gilt grundsätzlich, daß ein lineares Gleichungssystem entweder keine, genau eine oder aber unendlich viele Lösungen hat.

Die bekannteste Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist das **Einsetzungsverfahren**. Dabei wird eine beliebige Gleichung G nach einer beliebigen Unbekannten x_i aufgelöst, und eben diese Unbekannte in allen anderen Gleichungen durch den Term ersetzt, welcher nach dem Auflösen der Gleichung G auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens steht. Auf diesem Weg ergibt sich ein neues, um eine Gleichung und um eine Unbekannte reduziertes Gleichungssystem. Ist nun die Lösungsmenge dieses vereinfachten Gleichungssystems bestimmbar, lassen sich über die nach x_i aufgelöste Gleichung G auch alle erlaubten Werte von x_i und somit die Lösungsmenge des ursprünglichen Gleichungssystems ermitteln. Ist die Lösungsmenge des vereinfachten Gleichungssystems hingegen noch nicht bestimmbar, läßt sich das bereits vereinfachte Gleichungssystem wie eben beschrieben erneut vereinfachen, usw. Die wiederholte Anwendung solcher Vereinfachungen bildet insgesamt das Einsetzungsverfahren.

Beispiel 6.3:
a) Um die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\underbrace{2x + 3y = 14}_{G_1:=} \quad \text{und} \quad \underbrace{4x - y = 0}_{G_2:=}$$

mit x und y als Unbekannten zu bestimmen, kann man zunächst G_2 nach y auflösen und erhält dann $y = 4x$. Ersetzt man nun in G_1 die Unbekannte y durch

$4x$, ergibt sich die Gleichung $2x + 3(4x) = 14$. Die Lösung dieser Gleichung ist offensichtlich $x = 1$. Mit $y = 4x$ folgt $y = 4$. Die Lösungsmenge des betrachteten Gleichungssystems ist also $\{(1, 4)\}$.
b) Um die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} G_1&: \quad x + 2y + z = 2 \\ G_2&: -x + 2y + z = 0 \\ G_3&: \qquad\quad 4x - y = 10 \end{aligned}$$

mit x,y und z als Unbekannten zu bestimmen, kann man zunächst die Gleichung G_3 nach y auflösen und erhält dann $y = 4x - 10$. Ersetzt man nun in G_1 und G_2 die Unbekannte y durch $4x - 10$, ergibt sich das vereinfachte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} G_4&: \quad x + 2(4x - 10) + z = 2 \\ G_5&: -x + 2(4x - 10) + z = 0. \end{aligned}$$

Gleichung G_5 nach z aufgelöst entspricht $z = 20 - 7x$. Ersetzt man nun in G_4 die Unbekannte z durch $20 - 7x$, ergibt sich die Gleichung $x + 2(4x - 10) + (20 - 7x) = 2$. Es folgt $x = 1$, und mit $y = 4x - 10$ bzw. $z = 20 - 7x$ darüberhinaus $y = -6$ und $z = 13$. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also $\{(1, -6, 13)\}$.
c) Um die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\underbrace{x + 2y = 3}_{G_1 :=} \quad \text{und} \quad \underbrace{2x + 4y - 4 = 0}_{G_2 :=}$$

zu bestimmen, kann man zunächst G_1 nach x auflösen und erhält dann $x = 3 - 2y$. Ersetzt man nun in G_2 die Unbekannte x durch $3 - 2y$, ergibt sich die Gleichung $2(3 - 2y) + 4y - 4 = 0$. Diese Gleichung hat wegen $2 \neq 0$ keine Lösung. Die Lösungsmenge des betrachteten Gleichungssystems ist also die leere Menge.

Ein effizienteres Verfahren zur Bestimmung der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme, der sogenannte Gauss-Algorithmus, wird in der Vorlesung Mathematik B (Lineare Algebra) besprochen werden.

6.3 Ungleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Die systematische Bestimmung der Lösungsmenge linearer und nichtlinearer Ungleichungssysteme gestaltet sich im Allgemeinen etwas schwieriger als die der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme, da kein standardisiertes Vorgehen existiert, welches sicher zum Ziel führt.

In dem speziellen Fall, daß Ungleichungssysteme mit zwei Unbekannten zu analysieren sind, hat sich die graphische Veranschaulichung des Problems in der euklidischen Ebene als hilfreich erwiesen, indem jede ihrer Dimensionen mit jeweils einer der beiden Unbekannten assoziiert wird. Es können dann in einem ersten Schritt die Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen als Flächen dargestellt und in einem zweiten Schritt die Lösungsmenge des Ungleichungssystems als Schnittfläche eben dieser Flächen ermittelt werden. Dabei ist es üblich, den Rand von Flächen für die Relationen $\leq$ und $\geq$ mit durchgezogenen und für $<$ und $>$ mit gestrichelten Linien darzustellen.

Beispiel 6.4:
a) Um die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$\begin{aligned}
U_1&: x_2 \leq 2 + x_1\\
U_2&: x_2 \geq 1 - 1/2x_1\\
U_3&: x_1 < 3
\end{aligned}$$

mit x_1 und x_2 als Unbekannten zu bestimmen, kann man zunächst die zu jeder Ungleichung gehörende Gerade in der euklidischen Ebene darstellen (vgl. Abbildung 6.1). Die Lösungsmenge zu den jeweiligen Ungleichungen U_1, U_2 oder U_3 entspricht nun jeweils der Halbebene rechts unterhalb, rechts oberhalb bzw. links dieser Geraden. Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems ist damit das grau dargestellte Dreieck ohne seinen rechten Rand (vgl. Abbildung 6.1).
b) Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$\begin{aligned}
U_1&: x_1^2 + x_2^2 \leq 1\\
U_2&: \qquad x_2 \geq -x_1
\end{aligned}$$

mit x_1 und x_2 als Unbekannten ergibt sich als grau dargestellte Schnittfläche der vom Einheitskreis[1] umschlossenen Fläche, welche die Lösungsmenge von U_1 darstellt, mit der Halbebene rechts oberhalb der Geraden $x_2 = -x_1$, welche die Lösungsmenge von U_2 darstellt (vgl. Abbildung 6.2).

[1]Ein Kreis mit dem Radius $r \in \mathbb{R}$ um den Ursprung wird durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ beschrieben.

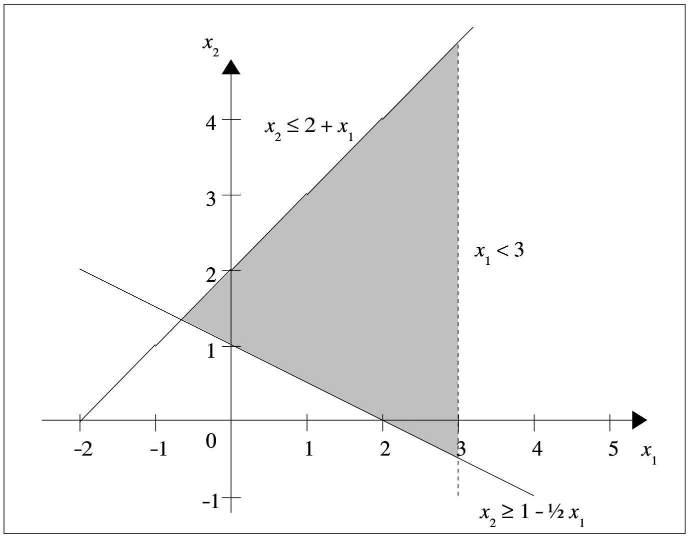


Abbildung 6.1: Lösungsmenge zu Beispiel 6.4 a)

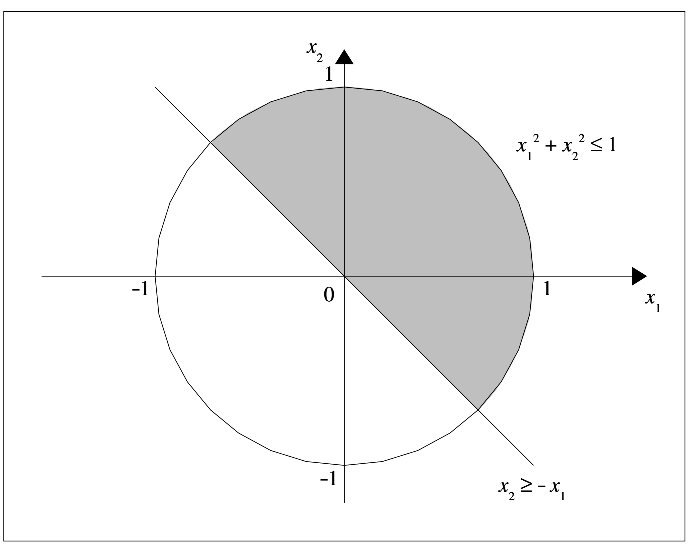


Abbildung 6.2: Lösungsmenge zu Beispiel 6.4 b)

Kapitel 7

Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

In diesem Kapitel wird der Begriff der Funktion behandelt. Er ist von Bedeutung, da er es ermöglicht, die Abhängigkeit einer Variablen von einer weiteren, unabhängigen Variablen geordnet zu beschreiben und zu analysieren.

7.1 Grundbegriffe

Unter einer **Funktion** versteht man eine Zuordnungsvorschrift f, die jedem Element x einer Menge D eindeutig ein Element einer Menge W zuordnet. Die Menge D heißt dabei auch **Definitionsbereich** der Funktion f und die Menge W **Wertebereich**. Man schreibt dafür ausführlich

$$f : \begin{cases} D \to W \\ x \mapsto y \end{cases},$$

oder aber, wenn Definitions- und Wertebereich unzweideutig feststehen,[1]

$$y = f(x).$$

Dabei bezeichnet man x als **Argument** oder auch als **unabhängige Variable** und y als **Funktionswert** oder als **abhängige Variable**.

Beispiel 7.1: Der Ausdruck

$$g : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 5x + 1 \end{cases},$$

definiert g als eine Funktion mit dem Intervall $[0,1]$ als Definitions- und der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Wertebereich. Der Funktionswert von $g(x)$ ist mit $1/2$ als Argument $7/2$, mit 0 als Argument 1.

[1] Dieses ist üblichweise dann der Fall, wenn $D = W = \mathbb{R}$ gilt. In einem solchen Fall heißt eine Funktion auch reellwertig.

Wird eine Funktion f mit $\mathbb{R}$ als Definitions- und Wertebereich betrachtet, so heissen alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ **Nullstellen** von f und $f(0)$ **y-Achsenabschnitt**.

Beispiel 7.2: Sei $f(x) := 4x^2 - 1$ eine Funktion mit $\mathbb{R}$ als Definitions- und Wertebereich. Dann sind $1/2$ und $-1/2$ die Nullstellen und -1 der y-Achsenabschnitt von f.

In diesem Skriptum werden ausschließlich Funktionen behandelt, deren Definitions- und Wertebereich Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.

7.2 Graphische Darstellung von Funktionen

Funktionen mit $\mathbb{R}$ als Definitions- und Wertebereich werden häufig in der euklidschen Ebene veranschaulicht, indem man jener ein rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem überlagert. In diesem Koordinatensystem wird der Wert der unabhängigen Variablen horizontal entlang der sogenannten x-Achse dieses Koordinatensystems und der Wert der abhängigen Variablen vertikal entlang der sogenannten y-Achse aufgetragen.[2] Für eine beliebige Funktion $f : D \to W$ ist nun die Menge aller Punkte

$$\{(x, y) | x \in D \wedge y = f(x)\},$$

in das vorgegebene Koordinatensystem eingetragen, der **Graph** von f.

Beispiel 7.3: In Abbildung 7.1 sind die Graphen der Funktionen $y = 1/2x + 1$ und $y = (x - 1)^2$ dargestellt.

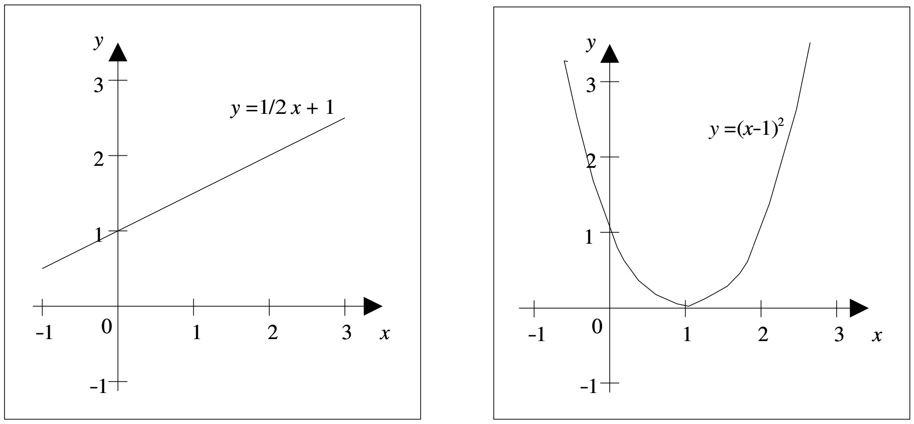
In den Wirtschaftswissenschaften wird aus historischen Gründen oftmals entgegen der mathematischen Konvention die unabhängige Variable auf der y-Achse und die abhängige Variable auf der x-Achse aufgetragen.

7.3 Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **monoton steigend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_2 > x_1$ die Ungleichung $f(x_2) \geq f(x_1)$ gilt. Analog heißt dieselbe Funktion **monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_2 > x_1$ die Ungleichung $f(x_2) \leq f(x_1)$ gilt. Ersetzt man in den beiden eben angegebenen Ungleichungen die Relationen $\geq$ und $\leq$ durch $>$ bzw. $<$, so erhält man die beiden Definitionen für **strenge** Monotonie.

Desweiteren heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **konvex**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und alle $a \in (0, 1)$ die Ungleichung $f(ax_1 + (1 - a)x_2) \leq af(x_1) + (1 - a)f(x_2)$ gilt. Dieselbe Funktion heißt **konkav**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und alle $a \in$

[2] Die x-Achse wird oft auch als Abszisse und die y-Achse als Ordinate bezeichnet.



(a) (b)

Abbildung 7.1: Graphen zu den Funktionen $y = 1/2x + 1$ und $y = (x-1)^2$

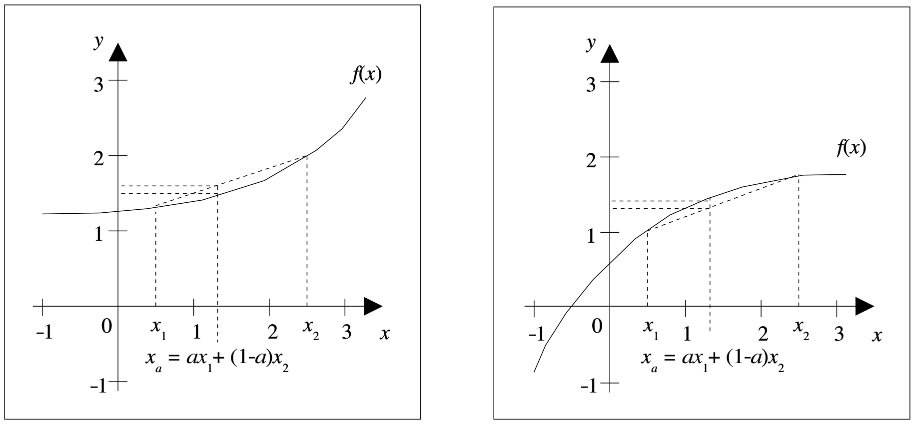
$(0, 1)$ die Ungleichung $f(ax_1 + (1-a)x_2) \geq af(x_1) + (1-a)f(x_2)$ gilt. Ersetzt man in den beiden eben angegebenen Ungleichungen die Relationen $\leq$ und $\geq$ durch $<$ bzw. $>$, so erhält man die beiden Definitionen für **strenge** Konvexität bzw. Konkavität.

Die beiden Begriffe der Konvexität und Konkavität werden in Abbildung 7.2 veranschaulicht. Jener Abbildung ist zu entnehmen, daß für konvexe Funktionen die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte des Graphen der Funktion stets oberhalb des Graphen verläuft (a), und für konkave Funktionen stets darunter (b).

Beispiel 7.4:
a) Die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ mit $[0, \infty)$ als Definitionsbereich ist offensichtlich streng monoton steigend und, wie etwa die Betrachtung des Graphen von f zeigt, konkav.
b) Die Funktion $g(x) := -x+2$ ist streng monoton fallend, konkav und konvex, aber weder streng konkav noch streng konvex.

In Abschnitt 7.1 wurde als ein konstitutives Merkmal des Funktionsbegriffs genannt, daß eine eine Funktion jedem Argument aus dem Definitionsbereich eindeutig einen Funktionswert aus dem Wertebereich zuordnet. Gilt nun darüberhinaus, daß eine Funktion jedem Element des Definitionsbereichs einen Funktionswert zuordnet, den sie keinem anderen Element des Definitionsbereichs zuordnet, so heißt diese Funktion **eineindeutig**.

Beispiel 7.5:
a) Die Funktion $f(x) = 2x + 6$ ist eineindeutig, da zu jedem Funktionswert $y \in \mathbb{R}$ genau ein Argument $x = 1/2y - 3$ existiert, für welches $f(x) = y$ gilt.
b) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht eineindeutig, da beispielsweise $f(-1) =$



(a) (b)

Abbildung 7.2: Konvexität und Konkavität

$f(1) = 1$ gilt und somit dem Funktionswert 1 kein eindeutiges Argument zugeordnet werden kann.

Für jede eineindeutige Funktion f ist die sogenannte **Umkehrfunktion** f^{-1} als die Funktion definiert, die jedem Element y des Wertebereichs von f genau das Element x des Definitionsbereichs von f zuordnet, für welches $f(x) = y$ ist. Es gilt also für alle Elemente des Definitionsbereichs von f

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$

Beispiel 7.6: Zur eineindeutigen Funktion $g(x) := 3x - 9$ ist die Umkehrfunktion $g^{-1}(x) = 1/3x + 3$. Man erhält sie, indem man die Funktion g als Gleichung $y = 3x - 9$ schreibt, diese nach x auflöst und abschließend die Variablenbezeichungen anpasst.

Als letzte im Rahmen dieses Kurses interessierende Eigenschaft von Funktionen sei die der **Stetigkeit** genannt. Da dieses Konzept jedoch recht anspruchsvoll ist und in der Vorlesung Mathematik A (Analysis) ausführlich und präzise behandelt wird, soll an dieser Stelle lediglich die Definition gegeben werden, daß eine Funktion genau dann stetig ist, 'wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen'.

Beispiel 7.7:
a) Die Funktion $f(x) := 1/x$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist nicht stetig, da man, um sie zu zeichnen, beim Überqueren der y-Achse den Stift absetzen muß.
b) Bezeichne $\lceil x \rceil$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die kleinste ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die $n \geq x$ gilt. Der Graph der Funktion $f(x) := \lceil x \rceil$ hat dann die Form einer Treppe ohne ihre vertikalen Elemente; f ist nicht stetig.

7.4 Typen von Funktionen

In diesem Abschnitt werden einige häufig auftretende Funktionstypen vorgestellt:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißen Funktionen der Bauart

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{cases}$$

Polynome vom Grad n. Die $a_0, a_1, \dots, a_n$ heißen auch **Koeffizienten**. Man beachte, daß lineare Funktionen Polynome vom Grad 1 sind, und in diesem Fall der Koeffizient a_1 die Steigung und der Koeffizient a_0 den y-Achsenabschnitt der durch die lineare Funktion beschriebenen Geraden angibt. Es gilt, daß ein Polynom n-ten Grades maximal n Nullstellen hat.

Funktionen der Form

$$f : \begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und $D = \mathbb{R}$ für $n > 0$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $n \leq 0$ heißen **Potenzfunktionen**. Der Graph einer Potenzfunktion ist für $n > 1$ eine Parabel, für $n = 1$ eine Gerade, für $n = 0$ eine Gerade mit einer Unstetigkeitsstelle in $x = 0$ und für $n < 0$ eine Hyperbel.

Funktionen der Bauart

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ca^{p(x)} \end{cases}$$

mit $c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $p(x)$ als einem Polynom heißen **Exponentialfunktionen**. Sie sind insbesondere bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen anwendbar.

Funktionen der Form

$$f : \begin{cases} (0, \infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_a x \end{cases}$$

heißen **Logarithmusfunktionen** zur Basis a.

Schließlich sollen noch die zwei wichtigsten **trigonometrischen Funktionen** vorgestellt werden, der Sinus und der Cosinus. Wie man Abbildung 7.3 entnehmen kann, ist $\sin \alpha$ (sprich: Sinus alpha) als die y-Koordinate des Schnittpunkts eines im Ursprung beginnenden Strahls, der mit der x-Achse einen Winkel von α einschließt, mit dem Einheitskreis definiert. $\cos \alpha$ (sprich: Cosinus alpha) ist hingegen als die x-Koordinate dieses Punkts definiert.

Man beachte, daß die Argumente trigonometrischer Funktionen im Regelfall nicht in Grad, sondern als **Bogenmaß** angegeben werden. In diesem Maß entsprechen 360 Grad dem Umfang des Einheitskreises 2π. Andere Winkel werden proportional umgerechnet, d.h. ein Winkel von α Grad entspricht im Bogenmaß $2\pi\frac{\alpha}{360}$.

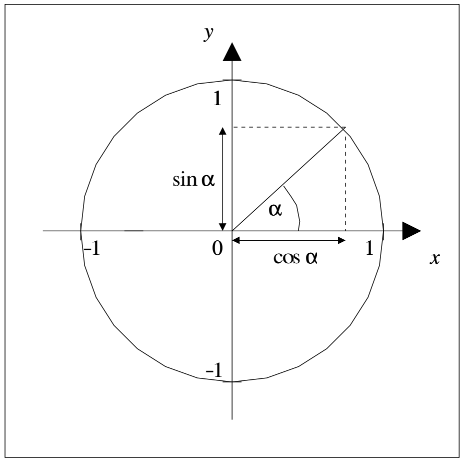


Abbildung 7.3: Sinus und Cosinus am Einheitskreis

7.5 Ausblick: Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

In der Ökonomie kommt es häufig vor, dass eine Grösse von zwei oder mehreren anderen Grössen abhängt. Zum Beispiel hängt die nachgefragte Menge eines Gutes vom Preis des Gutes, seiner Qualität und dem Einkommen des Konsumenten. Wenn also eine Variable z von den Variablen x und y abhängt, schreiben wir $z = f(x, y)$ und meinen damit, dass die Regel f jeder möglichen (x, y)-Kombination eine Zahl z zuordnet. Beispiele sind $f(x, y) = x^2 + 4 \cdot y^3$ oder $f(x, y) = x^2 \cdot y^2$. Ganz ähnlich wie im Fall einer Variablen kann man über Definitionsbereich und Wertebereich sprechen, das soll jedoch nicht Gegenstand dieser kurzen Erläuterungen sein.

Kapitel 8

Ableitung von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

In diesem Kapitel wird das Konzept der Ableitung von Funktionen behandelt. Es ist zentraler Bestandteil der klassischen Optimierungstheorie, welche wiederum für die Modellierung menschlichen Verhaltens in den Wirtschaftswissenschaften von Bedeutung ist.

8.1 Das Konzept der Ableitung

Der Koeffizient a einer linearen Funktion $f(x) := ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ wird in der Regel als **Steigung** dieser Funktion bezeichnet, da er angibt, um wieviel Einheiten der Funktionswert von $f(x)$ steigt, wird das Argument x um eine Einheit erhöht. Soll nun der Begriff der Steigung auf nicht-lineare Funktionen übertragen werden, ist zu berücksichtigen, daß der Funktionswert derartiger Funktionen bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit unterschiedlich stark ansteigen kann, abhängig davon, auf welches absolute Niveau das Argument angehoben wird. An dieser Stelle kommt das Konzept der Ableitung zum Tragen.

Sei im folgenden $f(x)$ eine stetige, reellwertige Funktion. Man kann nun die **durchschnittliche Steigung** von $f(x)$ zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$ mit $x_0, \Delta x \in \mathbb{R}$ und $\Delta x \neq 0$ angeben mit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Dieser Quotient heißt auch **Differenzenquotient** und wird in Abbildung 8.1 veranschaulicht.

Betrachtet man nun den Wert des Differenzenquotienten für beliebig kleine $|\Delta x| \neq 0$ oder, formaler ausgedrückt, den **Grenzwert** des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$, so erhält man die sogenannte **Ableitung** von $f(x)$ an der

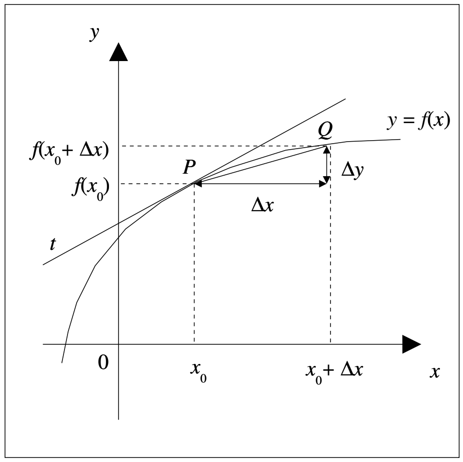


Abbildung 8.1: Veranschaulichung des Differenzenquotienten

Stelle x_0. Sie wird üblicherweise mit den Symbolen $f'(x_0)$ oder auch $\frac{df(x_0)}{dx}$ bezeichnet.[1]

Anschaulich betrachtet gibt der Differenzenquotient die Steigung der Strecke zwischen den Punkten P und Q an (vgl. Abbildung 8.1), einer sogenannten **Sekante**, wohingegen die Ableitung die Steigung der Geraden t angibt, welche den Graphen von $f(x)$ im Punkt P zwar berührt, aber nicht schneidet, einer sogenannten **Tangente**.

Man beachte, daß nicht für alle Funktionen für ihren gesamten jeweiligen Definitionsbereicht eine Ableitung angegeben werden kann, da der weiter oben erwähnte Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$ nicht in jedem Fall existiert. Kann aber die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 angegeben werden, so heißt diese Funktion **differenzierbar** in x_0. Ist eine Funktion für alle Elemente ihrer Definitionsmenge differenzierbar, so heißt sie einfach nur differenzierbar.

Ermittelt man für eine solche, differenzierbare Funktion $f(x)$ ihre Ableitung allgemein für alle Elemente ihres Definitionsbereichs, so erhält man eine neue Funktion $f'(x)$, deren Funktionswert für alle Elemente des Definitionsbereichs von $f(x)$ der Ableitung von $f(x)$ an eben dieser Stelle entspricht. Diese Funktion $f'(x)$, die ebenfalls als Ableitung bezeichnet wird, kann nun unter Umständen ihrerseits abgeleitet werden. Die sich dann ergebende Funktion heißt auch **zweite Ableitung** von $f(x)$ und wird mit den Symbolen $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$ oder auch $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ bezeichnet. Analog sind für alle $n \in \mathbb{N}$ höherrangige Ableitungen definiert.

Beispiel 8.1:

[1]Der Begriff des Grenzwerts wird in Rahmen dieses Wiederholungskurses nur intuitiv verwendet. Seine exakte Verwendung wird in der Vorlesung Mathematik A (Analysis) vorgestellt werden.

a) Sei $f(x) := x^2$. Dann ist der Differenzenquotient von $f(x)$ an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}.$$

Nach einigen Umformungsschritten erhält man daraus

$$2x_0 + \Delta x.$$

Aus dieser Darstellung des Differenzenquotienten wird nun deutlich, daß jener für $\Delta x \to 0$ den Wert $2x_0$ annimmt. Die Abbleitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist also $2x_0$; $f'(x) = 2x$.

b) Betrachtet man nun den Differenzenquotienten von $f'(x)$ an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, also den Ausdruck

$$\frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{\Delta x},$$

und geht man wie unter a) vor, so ergibt sich, daß die Ableitung von $f'(x)$ für alle Elemente des Definitionsbereichs 2 ist, und somit für die zweite Ableitung von $f(x)$ gilt: $f''(x) = 2$.

c) Sei $g(x) := |x|$.[2] Der Differenzenquotient von $g(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist dann

$$\frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Für beliebig kleine $|\Delta x| > 0$ hat dieser Differenzenquotient für $\Delta x > 0$ den Wert 1 und für $\Delta x < 0$ den Wert -1. Es existiert also kein Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$, und die Funktion $g(x)$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

8.2 Ableitungen ausgewählter Funktionen

Da die analytische Bestimmung einer Ableitung über den Differenzenquotienten sehr viel Zeit in Anspruch nimmt und gelegentlich überhaupt nur über die Anwendung fortgeschrittener Techniken möglich ist, ist es sinnvoll, die Ableitungen häufig auftretender Funktionen auswendig zu kennen. In Tabelle 8.1 sind die Ableitungen ausgewählter Funktionen zusammengestellt.

8.3 Ableitungsregeln

Oftmals sind Funktionen abzuleiten, die aus anderen Funktionen, deren Ableitungen bekannt sind, zusammengesetzt sind. In diesem Fall sind die in diesem Abschnitt zusammengestellten Ableitungsregeln sehr nützlich. Seien nachfolgend $g(x)$ und $h(x)$ zwei reellwertige und differenzierbare Funktionen:

[2] $|x|$ bezeichnet den sogenannten Betrag einer reellen Zahl x. Dabei ist $|x|$ für $x \geq 0$ gleich x und für $x < 0$ gleich $-x$.

$f(x)$	$f'(x)$
x^a $(a \in \mathbb{R})$	ax^{a-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
a^x $(a > 0)$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$ $(a > 0)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Tabelle 8.1: Ableitungen ausgewählter Funktionen

Nach der **Faktorregel** ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) := ag(x)$$

mit $a \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f'(x) = ag'(x).$$

Nach der **Summenregel** ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) := g(x) + h(x)$$

die Funktion

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

Nach der **Produktregel** ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) := g(x) \cdot h(x)$$

die Funktion

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x).$$

Nach der **Quotientenregel** ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) := \frac{g(x)}{h(x)}$$

mit $h(x) \neq 0$ die Funktion

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}.$$

Schließlich ist nach der **Kettenregel** die Ableitung der Funktion

$$f(x) := g(h(x))$$

die Funktion

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Natürlich ist es oft erforderlich, die oben genannten Ableitungsregeln kombiniert anzuwenden, um die Ableitung einer Funktion zu bestimmen.

Beispiel 8.2:
a) Die Ableitung von $f(x) := 3\sin x$ ist nach der Faktorregel $f'(x) = 3\cos x$.
b) Die Ableitung von $f(x) := 4x^2 + 5x + \ln x$ ist nach der Summen- und der Faktorregel $f'(x) = 8x + 5 + 1/x$.
c) Die Ableitung von $f(x) := 4x\sin x$ ist nach der Produkt- und der Faktorregel $f'(x) = 4\sin x + 4x\cos x$.
d) Die Ableitung von $f(x) := \frac{x^2}{e^x}$ ist nach der Quotientenregel $f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$.
e) Die Ableitung von $f(x) := 2\sin\left(x^3\right)$ ist nach der Ketten- und der Faktorregel $f'(x) = 6x^2\cos\left(x^3\right)$.

8.4 Ausblick: Ableitungen von Funktionen mit zwei Variablen

Angenommen, wir haben eine Funktion f, die von zwei Variablen x und y abhängt, z.B. $f(x,y) = x^2 \cdot y$. Auch eine solchen Funktion können wir nach x oder y ableiten. Dabei betrachten wir jeweils die Variable, nach der wir nicht ableiten, als eine Konstante und wenden dann die bekannten Ableitungsregeln auf die Variable an, für deren Ableitung wir uns unteressieren. Wir nennen diese Ableitung die **partielle erste Ableitung** von f und schreiben - falls wir f nach x ableiten wollen -

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

Wenn wir also unser Beispiel nach x ableiten wollen, lautet die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot y.$$

Genauso haben wir

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \cdot 1.$$

Kapitel 9

Kurvendiskussion

In diesem Kapitel wird das Konzept der Kurvendiskussion von Funktionen behandelt. Das ist ein noch zentralerer Bestandteil der klassischen Optimierungstheorie, welche wiederum für die Modellierung menschlichen Verhaltens in den Wirtschaftswissenschaften von Bedeutung ist. Der Grund ist recht einleuchtend: wenn z.B. der Gewinn einer Unternehmung in Abhängigkeit des Preises, den sie verlangt, durch eine Funktion beschrieben wird, maximiert der Preis den Gewinn, bei dem diese Funktion ihren Hochpunkt, ihr Maximum annimmt.

9.1 Grundbegriffe

Aus der Schule kennen wir noch den Hoch- und den Tiefpunkt. Wir werden diese Punkte im folgenden Maximum bzw. Minimum nennen und noch eine Unterscheidung treffen, ob es sich beispielsweise nur um ein Maximum für einen kleinen Teilabschnitt der Funktion handelt oder ob es sich um ein Maximum für den ganzen Definitionsbereich der Funktion handelt.

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f hat an der Stelle x_0

- ein lokales Minimum, wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle x nahe bei x_o gilt
- ein globales Minimum, wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in X$ gilt
- ein lokales Maximum, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle x nahe bei x_o gilt
- ein globales Maximum, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in X$ gilt

9.2 Notwendige und hinreichende Kriterien

9.2.1 Notwendiges Kriterium

Hat f an einer Stelle x_0 ein lokales Extremum, so verschwindet dort die erste Ableitung: $f'(x_0) = 0$. Man muss also die Nullstelle der ersten Ableitung berechnen.

9.2.2 Hinreichende Kriterien

Gilt neben $f'(x_0) = 0$ auch $f''(x_0) \neq 0$, so hat f ein lokales Extremum. Dabei muss eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein: entweder die zweite Ableitung ist grösser oder kleiner Null. Oder die erste Ableitung hat einen Vorzeichenwechsel beim fraglichen Punkt x_0. Zusammenfassend:

- Ist $f''(x_0) > 0$ und $f'(x_0) = 0$, so handelt es sich um ein lokales Minimum, ist $f''(x_0) < 0$ und $f'(x_0) = 0$, um ein lokales Maximum.
- Hat die erste Ableitung einen Vorzeichenwechsel bei x_0, so liegt ein Extremum vor. Bei einem Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus handelt es sich um ein Maximum, bei einem Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus um ein Minimum.

Hier ist wichtig zu verstehen, dass es genügt, wenn eine dieser hinreichenden Bedingungen erfüllt ist. Das sieht man sehr schön an der Funktion $f(x) = x^4$. Es gilt $f'(0) = f''(0)$. Der Test mit der zweiten Ableitung würde also ergeben, dass kein Extremum vorliegt. Überprüft man jedoch die erste Ableitung links und rechts von $x_0 = 0$, so stellt man fest, dass es sich um ein Minimum handelt (nachprüfen!).

9.3 Extrema am Rande

Es kann auch sein, dass eine Funktion ihr Maximum bzw. Minimum am Rande des Definitionsbereichs annimmt. Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ würde dann gelten: wenn b ein lokales Maximum von f ist, dann gilt $f'(b) \geq 0$. Das macht man sich am besten mittels einer geeigneten Graphik klar. Zur Übung formuliere man entsprechende Varianten dieser Aussage wenn b ein lokales Minimum oder a ein lokales Maximum ist.

Extrema am Rande sind häufig globale Extrema: selbst wenn also z.B. ein lokales Maximum im Inneren des Definitionsbereiches vorliegt, können wir ein globales Maximum am Rande des Definitionsbereichs haben.

9.4 Der Vollständigkeit halber: Wendepunkte

Die Wendepunkte einer Funktioen f sind die Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion f'. Man erhlt sie, indem man die zweite Ableitung mit Null gleichsetzt, d.h. $f''(x) = 0$ berechnet. Auch hier hat man es nur mit einer notwendigen Bedingung zu tun, also sind weitere Untersuchungen nötig. Wenn zum Beispiel die dritte Ableitung an der fraglichen Stelle ungleich Null ist, so handelt es sich tatsächlich um eine Wendestelle. Ist die dritte Ableitung jedoch gleich 0, so ist damit noch nicht gezeigt, dass an dieser Stelle keine Wendestelle ist. In diesem Fall sollte man auf Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung unmittelbar vor und hinter der fraglichen Stelle untersuchen (vgl. Untersuchung auf Extrempunkte). Tritt ein Vorzeichenwechsel auf, so handelt es sich um eine Wendestelle. Ist das Vorzeichen der 2. Ableitung vor und hinter der Stelle gleich, so handelt es sich auch nicht um eine Wendestelle. Dieses Kriterium kann alternativ zum erstgenannten Kriterium (3. Ableitung ungleich 0) angewendet werden. Ist der Wert der dritten Ableitung an dieser Stelle grösser 0, handelt es sich um eine Wendestelle mit Übergang von einer Rechtskrümmung zu einer Linkskrümmung, ist er jedoch kleiner 0, so handelt es sich um eine Wendestelle mit Übergang von einer Linkskrümmung zu einer Rechtskrümmung.

Kapitel 10

Grundzüge der Linearen Algebra

In diesem Kapitel werden grundlegende Konzepte der Linearen Algebra wiederholt, insbesondere das des Vektors und der Matrix.

10.1 Grundbegriffe

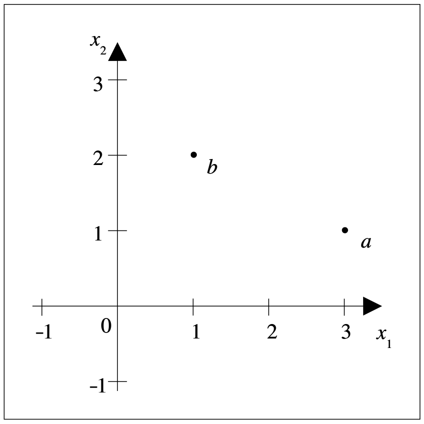
Ein **Vektor** ist ein Tupel $x \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Zahl n heißt dabei auch **Dimension** des Vektors. Anders als bei Tupeln üblich werden die einzelnen Komponenten eines Vektors nicht horizontal und durch Kommata getrennt aufgelistet, sondern vertikal.

Vektoren werden üblicherweise mit kleinen lateinischen Buchstaben, ihre einzelnen Komponenten durch denselben Buchstaben gefolgt von einer tiefgestellten Dimensionsangabe bezeichnet. So bezeichnen x_1, x_2 und x_3 die Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{R}^3$, es gilt also

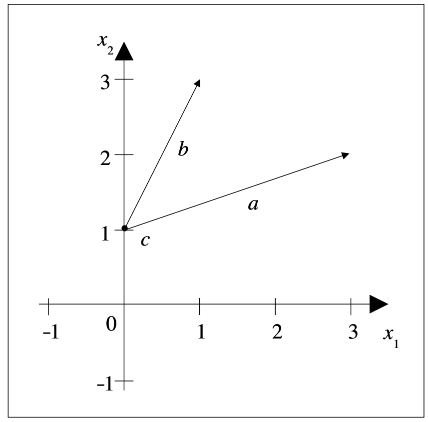
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor kann sowohl als **Punkt** als auch als **Richtung** interpretiert werden, wobei jede Komponente des Vektors mit einer Dimension eines n-dimensionalen euklidischen Raums assoziiert wird und im Fall der Punktinterpretation eine absolute Koordinate und im Fall der Richtungsinterpretation eine relative Verschiebung in dieser Dimension angibt.

Beispiel 10.1: Die Punkt- und die Richtungsinterpretationen der Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ werden in Abbildung 10.1 veranschaulicht. Dabei sind die durch a und b beschriebenen Richtungen ausgehend von einem Punkt c dargestellt.



(a)



(b)

Abbildung 10.1: Punkt- und Richtungsinterpretation von Vektoren

Spezielle Vektoren sind der **Nullvektor**, dessen Komponenten alle gleich Null sind und der mit dem Symbol 0 bezeichnet wird, und die sogenannten **Einheitsvektoren**. Dabei ist für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ der i-te Einheitsvektor e_i genau derjenige Vektor, dessen i-te Komponente gleich Eins und dessen andere Komponenten gleich Null sind.[1]

Eine rechteckige Anordnung reeller Zahlen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}$ heißt **Matrix** mit n Zeilen und m Spalten oder auch $n \times m$-Matrix (sprich: n Kreuz m Matrix). Die a_{ij} heißen **Elemente** oder **Komponenten** der Matrix. Dabei fungieren $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ als Zeilen- bzw. Spaltenindex. Verkürzend schreibt man für die oben angegebene Matrix auch (a_{ij}), $(a_{ij})_{n \times m}$ oder auch nur A. Eine Matrix, die die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten hat, heißt auch **quadratische Matrix**.

Eine spezielle Matrix ist die **Nullmatrix**, deren Elemente alle gleich Null sind und die mit dem Symbol 0 bezeichnet wird. Eine spezielle quadratische Matrix ist die **Einheitsmatrix** $E = (e_{ij})_{n \times n}$, welche dadurch gekennzeichnet ist, daß alle ihre Elemente e_{ij} mit $i \neq j$ gleich Null und alle ihre Elemente e_{ij} mit

[1] Strenggenommen muß bei der Spezifikation von Null- und Einheitsvektoren immer angegeben werden, welche Dimension dieser Vektor hat. Dieses wird jedoch in der Regel aus dem Kontext deutlich und daher im Regelfall nicht expliziert.

$i = j$ gleich Eins sind. Die Gesamtheit der Elemente e_{ij} mit $i = j$ wird auch als **Hauptdiagonale** bezeichnet.

Beispiel 10.2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

ist eine 2×3-Matrix,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die 2×2-Nullmatrix und

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die 2×2-Einheitsmatrix.

Zu jeder Matrix $A = (a_{ij})_{n \times m}$ existiert eine sogenannte **transponierte** Matrix $B = (b_{ij})_{m \times n}$ mit $a_{ij} = b_{ji}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Diese Matrix entsteht also anschaulich dadurch, daß man alle Elemente der Ausgangsmatrix A an der Hauptdiagonalen spiegelt, und wird üblicherweise als $A^\top$ (sprich: A transponiert) bezeichnet.

Beispiel 10.3: Die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

gehörende transponierte Matrix ist

$$A^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt für jede beliebige Matrix A die Beziehung $\left(A^\top\right)^\top = A$.

10.2 Verknüpfung von Matrizen und Vektoren

Auch für Vektoren und Matrizen sind eine Vielzahl von Verknüpfungen definiert, welche alle auf den vier Grundrechenarten aufbauen. Da man Vektoren als spezielle Matrizen, deren zweite Dimension gleich Eins ist, auffassen kann, werden nachfolgend die eben erwähnten Verknüpfungen lediglich für Matrizen angegeben; die entsprechenden Verknüpfungen von Vektoren ergeben sich daraus unmittelbar.

Für die **Addition** $A+B$ zweier Matrizen $A=(a_{ij})_{n\times m}$ und $B=(b_{ij})_{n\times m}$, die zwingend die gleiche Anzahl n an Zeilen und m an Spalten aufweisen müssen, zu einer Matrix $C=(c_{ij})_{n\times m}$ gilt für alle $i=1,\dots,n$ und $j=1,\dots,m$

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Zwei Matrizen und damit auch zwei Vektoren werden also komponentenweise addiert.

Für die sogenannte **Skalarmultiplikation** αA einer Matrix $A=(a_{ij})_{n\times m}$ mit einem Skalar $\alpha\in\mathbb{R}$ mit $C=(c_{ij})_{n\times m}$ als Produktmatrix für alle $i=1,\dots,n$ und $j=1,\dots,m$ gilt

$$c_{ij}=\alpha a_{ij}.$$

Eine Matrix bzw. ein Vektor wird also mit einem Skalar multipliziert, indem jede Komponente mit eben diesem Skalar multipliziert wird.

Offensichtlich gelten sowohl für die Addition von Matrizen als auch für die Skalarmultiplikation sowohl das Kommutativ- und das Distributiv- als auch das Assoziativgesetz.

Beispiel 10.4:
a) Nachfolgend ist ein Beispiel für die Addition von Matrizen angegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

b) Nachfolgend ist eine Beispiel für die Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar angegeben:

$$3\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 6 & 15 & 21 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Eine Verknüpfung, die ausschließlich für Vektoren definiert ist, stellt das **Skalarprodukt** dar. Es ist für zwei Vektoren $a,b\in\mathbb{R}^n$ mit der gleichen Dimension n definiert als

$$a\cdot b=ab:=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

also als die Summe über die Produkte der sich entsprechenden Komponenten der beiden Vektoren. Offensichtlich ist auch die Bildung des Skalarprodukts kommutativ.

Mit Hilfe des Skalarprodukts läßt sich der Begriff der **Norm** eines Vektors einführen, welche die Länge dieses Vektors im euklidischen Sinn angibt. Sie wird für einen Vektor $x\in\mathbb{R}$ durch das Symbol $||x||$ beschrieben und ist definiert als

$$||x||:=\sqrt{xx}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

Desweiteren kann über das Skalarprodukt der Begriff der **Orthogonalität** erfaßt werden: Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn gilt:

$$xy = 0$$

Beispiel 10.5:
a) Das Skalarprodukt der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 33$.

b) Die Länge des Vektors $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $||x|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$.

c) Die beiden Vektoren

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y := \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

stehen wegen $xy = 2 \cdot (-6) + 3 \cdot 4 = 0$ senkrecht aufeinander.

Als letzte Verknüpfung sei an dieser Stelle noch die **Multiplikation von Matrizen** angeführt. Sie führt für eine Matrix $A = (a_{ij})_{n \times m}$ als erstem Faktor und $B = (b_{ij})_{m \times p}$ als zweitem Faktor zu einer Produktmatrix $C = (c_{ij})_{n \times p}$; es gilt dabei, daß die Spaltenzahl der ersten Faktormatrix und die Zeilenzahl der zweiten Faktormatrix zwingend übereinstimmen müssen, und daß die Produktmatrix so viele Zeilen wie die erste Faktormatrix und so viele Spalten wie die zweite Faktormatrix aufweist. Auf Komponentenebene ist dabei für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, p$

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}.$$

Am zweckmäßigsten ist, die Multiplikation zweier Matrizen nach dem sogenannten **Falkschen Schema** vorzunehmen, welches nachfolgend für $C = AB$ abgebildet ist:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \mathbf{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \mathbf{b_{2j}} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{h1} & b_{h2} & \cdots & \mathbf{b_{hj}} & \cdots & b_{hp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & \mathbf{b_{mj}} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{il}} & \cdots & \mathbf{a_{im}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \mathbf{c_{ij}} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

In diesem Schema schreibt man die erste Faktormatrix A nach links unten und die zweite Faktormatrix B nach rechts oben. Jedes Element c_{ij} der Produktmatrix, welche innerhalb dieses Schemas rechts unten angesiedelt ist, ergibt sich, indem man das ganz links stehende Element der i-ten Zeile von A mit dem ganz oben stehenden Element der j-ten Spalte von B multipliziert, anschließend das zweite Element von links der i-ten Zeile von A mit dem am zweitobersten stehenden Element der j-ten Spalte von B multipliziert, usw., und schließlich die Summe der auf diese Weise bestimmten Produkte bildet.

Beispiel 10.6: Das nachfolgende Matrizenprodukt

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 12 & 18 & 29 \\ 9 & 12 & 19 \end{pmatrix}
$$

hat im Falkschen Schema die folgende Darstellung:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 12 & 18 & 29 \\ 9 & 12 & 19 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Man beachte, daß für die Matrizenmultiplikation zwar das Assoziativ- und das Distributivgesetzt gelten, nicht aber das Kommutativgesetz. Es gilt also allgemein für Matrizen A, B und C mit geeigneter Zeilen- und Spaltenzahl:

$$
\begin{aligned}
A(BC) &= (AB)C \\
A(B+C) &= AB + AC
\end{aligned}
$$

Desweiteren gilt für die Multiplikation einer quadratischen Matrix A mit der geeigneten Einheitsmatrix E

$$AE = EA = A.$$

Man sagt, die Einheitsmatrik sei das **neutrale Element** bezüglich der Matrizenmultiplikation.

Eng mit dem Begriff des neutralen Elements ist der des **inversen Elements** verbunden, welches dadurch gekennzeichnet ist, daß die Multiplikation eines Elements mit seinem inversen Element das neutrale Element zum Ergebnis hat. So ist bezüglich der Multiplikation reeller Zahlen 1 das neutrale Element, und für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ wegen $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ der Kehrwert $\frac{1}{x} = x^{-1}$ das dazugehörige inverse Element.

Auch für die Matrizenmultiplikation existiert das Konzept des inversen Elements unter der Bezeichnung der **inversen Matrix**. Sie wird für eine Matrix A mit dem Symbol A^{-1} bezeichnet, und ist als diejenige Matrix definiert, für die gilt:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Es existiert allerdings nicht zu jeder Matrix eine inverse Matrix. So gibt es beispielsweise keine Matrix N mit $N0 = 0N = E$ und somit keine zur Nullmatrix inverse Matrix. In den Fällen, in denen eine inverse Matrix existiert, ist diese aber immer eindeutig. Im nachfolgenden Beispiel wird demonstriert, daß sich die Frage, ob zu einer Matrix eine inverse Matrix existiert, auf die der Lösbarkeit mehrerer linearer Gleichungssysteme zurückführen läßt, und daß sich die inverse Matrix selbst gegebenenfalls unmittelbar aus den Lösungsmengen eben dieser Gleichungssysteme ergibt.

Beispiel 10.7: Soll eine Matrix $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ die inverse Matrix zu $A := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sein, ist an sie die Forderung

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+4b & 3c+4d \\ a+2b & c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu stellen. Die Fragestellung, ob eine Matrix existert, welche dieser Forderung genügt und welche Form sie gegebenenfalls hat, reduziert sich offensichtlich auf die Bestimmung der Lösungsmengen der beiden linearen Gleichungssysteme

$$3a + 4b = 1 \ \wedge \ a + 2b = 0$$

und

$$3c + 4d = 0 \ \wedge \ c + 2d = 1.$$

Wie man etwa mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens feststellt, hat das erste lineare Gleichungssystem die Lösung $a = 1$ und $b = -1/2$ und das zweite lineare Gleichungssystem die Lösungsmenge $c = -2$ und $d = 3/2$. Also existiert eine inverse Matrix zu A, und diese Matrix lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

10.3 Linearkombinationen und Determinanten

In diesem Abschnitt werden einige Begriffe wiederholt, deren Nutzen möglicherweise nicht unmittelbar ersichtlich ist, die aber sowohl in der Linearen Algebra als auch in der Analysis immer wieder von Bedeutung sind, und deren Kenntnis daher unerläßlich ist.

Ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ ist eine sogenannte **Linearkombination** der Vektoren $x_1, \dots, x_k$, wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ existieren, so daß gilt:

$$y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

Gilt zudem für alle $i = 1, \dots, k$ die Einschränkung $\alpha_i \geq 0$ und ist $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, dann ist der Vektor y überdies eine **Konvexkombination** der Vektoren $x_1, \dots, x_k$.

Eine Menge von Vektoren $\{x_1, \dots, x_n\}$ heißt nun **linear abhängig**, wenn sich mindestens einer ihrer Vektoren als Linearkombination der restlichen Vektoren darstellen läßt. Anderenfalls heißt die Menge von Vektoren **linear unabhängig**.

Beispiel 10.8:
a) Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind wegen

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

linear abhängig.
b) Die drei Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ sind offensichtlich linear unabhängig.

Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ spannen in der euklidischen Ebene ein **Parallelogramm** auf. Die Problemstellung, den Flächeninhalt dieses Parallelogramms zu bestimmen, führt auf den Begriff der **Determinante**. Dazu betrachte man zunächst die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

welche die beiden Vektoren a und b als Spaltenvektoren hat. Es gilt nun, daß der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms dem Absolutbetrag der Determinante der Matrix M, welche mit dem Symbol $\det M$ oder auch $|M|$ bezeichnet wird, entspricht. Dabei gilt allgemein für eine 2×2-Matrix A:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Bemerkenswert ist, daß mit Hilfe von Determinanten in den unterschiedlichsten mathematischen Zusammenhängen immer wieder wichtige Aussagen getroffen werden können, die weit über die Bestimmung eines Flächeninhalts hinausgehen.

Beispiel 10.9:
a) Das von den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm hat wegen

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 21 - 4 = 17$$

den Flächeninhalt 17.
b) Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Wie der Begriff der Determinante vom $\mathbb{R}^2$ auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen werden kann und Determinaten quadratischer Matrizen mit mehr als zwei Zeilen und Spalten technisch errechenbar sind, wird Bestandteil der Vorlesung Mathematik B (Lineare Algebra) sein.

10.4 Quadratische Formen und Definitheit

In diesem Kapitel wird eine spezielle Klasse von Funktionen, die sogenannten quadratischen Formen, und der eng mit dieser Funktionsklasse verbundene Begriff der Definitheit von Matrizen behandelt. Das vorliegende Skriptum geht damit an dieser Stelle leicht über die üblicherweise in der Schule behandelte Mathematik hinaus. Da aber der Begriff der Definitheit im Verlauf der Vorlesung Mathematik A (Analysis) im Rahmen der Optimierung von Funktionen von sehr großer Bedeutung sein wird, soll an dieser Stelle bereits eine kurze Heranführung an diesen Themenkomplex erfolgen.

Eine **quadratische Form** ist eine Funktion der Bauart

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sie ist anders als die in Kapitel 7 behandelten Funktionen nicht von einer, sondern von zwei Variablen x_1 und x_2 abhängig.

Beispiel 10.10: $f(x_1, x_2) := x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ ist eine quadratische Form, und es gilt $f(3, 1) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1^2 = 14$ und $f(0, 1) = -1$.

Alle quadratischen Formen werden nach ihrer sogenannten **Definitheit** unterschieden: Eine quadratische Form $f(x_1, x_2) = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^2$ heißt

$$\begin{aligned} \text{positiv definit} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.\, f(x) > 0, \\ \text{positiv semidefinit} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.\, f(x) \geq 0, \\ \text{negativ definit} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.\, f(x) < 0, \\ \text{negativ semidefinit} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.\, f(x) \leq 0, \\ \text{indefinit} \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists x, y \in \mathbb{R}^2.\, f(x) > 0 \wedge f(y) < 0. \end{aligned}$$

Jede quadratische Form $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ kann man in der Form

$$f(x) = x^\top A x$$

mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ als **symmetrischer** Matrix schreiben. Die oben definierten Definitheitsbegriffe werden nun auf Matrizen übertragen, indem eine Matrix A genau dann positiv definit genannt wird, wenn die quadratische Form $f(x) = x^\top A x$ positiv definit heißt, usw.

Um nun zu überprüfen, welcher der fünf Definitheitsbegriffe für eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

gilt, sind die nachfolgenden Äquivalenzbeziehungen sehr nützlich. Eine symmetrische Matrix A ist

$$\begin{aligned} \text{positiv definit} \quad &\Leftrightarrow \quad |A| > 0 \;\wedge\; a_{11} > 0, \\ \text{positiv semidefinit} \quad &\Leftrightarrow \quad |A| \geq 0 \;\wedge\; a_{11} \geq 0 \;\wedge\; a_{22} \geq 0, \\ \text{negativ definit} \quad &\Leftrightarrow \quad |A| > 0 \;\wedge\; a_{11} < 0, \\ \text{negativ semidefinit} \quad &\Leftrightarrow \quad |A| \geq 0 \;\wedge\; a_{11} \leq 0 \;\wedge\; a_{22} \leq 0, \\ \text{indefinit} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Beispiel 10.11:
a) Die quadratische Form $f(x_1, x_2) := x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ hat in der Matrixschreibweise die Darstellung

$$f(x_1, x_2) := (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Sie ist wegen $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$ indefinit.
b) Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

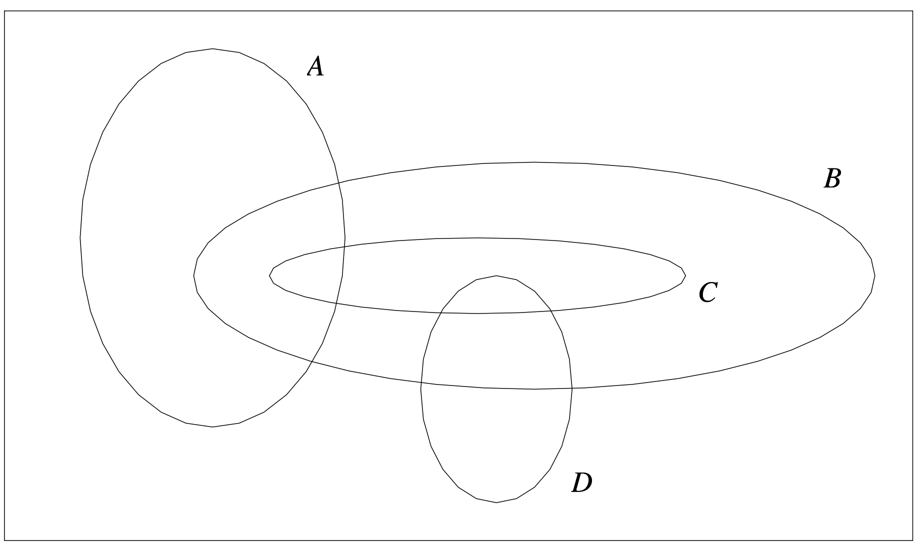
ist wegen $\det A = 14 > 0$ und $a_{11} = 3 > 0$ positiv definit.

Anhang A

Übungsaufgaben

Grundzüge der Mengenlehre

Aufgabe 1.1: Gegeben seien die Mengen A, B, C und D gemäß folgendem Venn-Diagramm:



Bestimmen Sie in diesem Diagramm die Mengen:

a) $(A \cap B) \setminus C$ **b)** $B \setminus (A \cup C \cup D)$ **c)** $\mathcal{C}_B(C \cap D)$

Aufgabe 1.2: Gegeben seien die Mengen $A := \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B := \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C := \{0\}$ und $D := \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

a) $((A \cap B) \cup \mathcal{C}_D C) \setminus B$ **b)** $D \setminus (D \cap (A \cup B))$

Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen:

c) $C \subset B \subset D$ **d)** $\{0\} \in D$ **e)** $0 \in D$

Aufgabe 1.3: Gegeben seien die Mengen $A := \{3, 4, 5, \ldots, 12\}$ und $B := \{3, 5, 7, \ldots, 25\}$.

a) Wieviele Elemente besitzt $A \times B$?
b) Für wieviele Elemente $(i, j) \in A \times B$ gilt $i \neq j$?

Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen?

c) $(5, 3) \in A \times B$ **d)** $(7, 5) \in A \times B$ **e)** $(17, 11) \in A \times B$

Aufgabe 1.4: Stellen Sie die Mengen $A := \{(x, x)|x \in \mathbb{R}\}$, $B := \{(x, x-1)|x \in \mathbb{R}\}$ und $C := \{(x, -x)|x \in \mathbb{R}\}$ in der euklidischen Ebene graphisch dar. Welche Punkte enthält $A \cap C$?

Grundzüge der Logik

Aufgabe 2.1: Stellen Sie fest, ob die folgenden Sätze Aussagen sind! Ordnen Sie ihnen gegebenenfalls den Wahrheitswert w oder f zu!

a) 'Ein Tag hat 24 Stunden.'
b) 'Jedes Jahr besitzt genau 365 Tage.'
c) 'Schaffe, schaffe, Häusle baue!'
d) 'Ist der Dollarkurs zur Zeit günstig?'
e) 'Die Erde ist eine Scheibe, um die sich die Sonne dreht.'
f) 'Die Orthographie dieses Satses ist falsch.'

Aufgabe 2.2: Interpretieren Sie geeignete Teile der folgenden Sätze als Aussagen (Aussageformen) und übersetzen Sie die folgenden Sätze in aussagenlogische Symbolsprache.

a) 'Weder Maier noch Müller verkaufen ihre Aktien.'
b) 'Der Himmel ist bewölkt, aber es regnet nicht.'
c) 'Wenn die Sonne scheint regnet es nicht, und wenn es regnet, scheint die Sonne nicht.'
d) 'Ist x größer als 2 oder kleiner als -2, so ist x^2 größer als 4.'

Aufgabe 2.3: Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

a) 'Die Preise steigen, obwohl die Nachfrage zurückgeht.'
b) 'Weder steigen die Preise, noch geht die Nachfrage zurück.'
c) 'Wenn die Preise steigen, geht die Nachfrage zurück.'

Aufgabe 2.4: Stellen Sie fest, bei welchen Teilen der folgenden Sätze es sich um notwendige, hinreichende oder notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen einer Mathematik-Klausur handelt:

a) 'Ein Student, der die Mathematik-Klausur besteht, kann lesen und schreiben.'
b) 'Ein Student, der alle Klausuraufgaben richtig löst, besteht die Mathematik-Klausur.'
c) 'Wenn ein Student mindestens die zum Bestehen vorgeschriebene Punktzahl erreicht, hat er die Mathematik-Klausur bestanden.'

Aufgabe 2.5: Zeigen Sie, daß die alte Bauernregel 'Kräht der Gockel auf dem Mist, so ändert sich das Wetter oder bleibt, wie es ist' immer wahr ist.

Aufgabe 2.6: Betrachten Sie die Aussageform $A(x) :=$ '$x + 1$ ist eine gerade Zahl' mit der Grundmenge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ und bestimmen Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen:

a) $\exists x\, A(x)$ **b)** $\forall x\, A(x)$

Wie ändert sich der Wahrheitsgehalt der beiden Aussagen, wenn die Grundmenge von $A(x)$ auf $\{1, 3, 5\}$ festgesetzt wird?

Arithmetik

Aufgabe 3.1: Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie gegebenenfalls zusammen.

a) $d - 2e - (f - 2g)$ **b)** $5e + 3x + (3x - 4e)$
c) $g + (2f - (g + 2f))$ **d)** $a + b - (2a - (b + a) - b)$

Aufgabe 3.2: Multiplizieren Sie aus:

a) $-x(u + v)$ **b)** $(4x - 0,5y)(-2u)$
c) $(2a - 3b)(4c - 5d)$ **d)** $(4x - 2y)(3u + 2v)(a + b + c)$

Aufgabe 3.3: Klammern Sie weitmöglichst aus:

a) $49xz - 14xu + 21xy$ **b)** $6ac - 12abc + 36acg - 18acx$
c) $ax + 2ay + 2bx + 4by$ **d)** $2ab - 2bc + 2au - 2av - 2cu + 2cv$

Aufgabe 3.4: Bestimmen Sie unter Verwendung einer der Binomischen Formeln:

a) $(5x - 2z)^2$ **b)** $(a - b)^2 + (b - a)^2$

Aufgabe 3.5: Schreiben Sie unter Verwendung von Binomen um:

a) $25x^2 - 20xy + 4y^2$ **b)** $49x^2 - 25y^2$

Aufgabe 3.6: Schreiben Sie als Dezimalbruch:

a) 9/16 **b)** 11/15 **c)** 5/9

Aufgabe 3.7: Kürzen Sie:

a) $\frac{14}{49}$ **b)** $\frac{12uvwx}{3vwxy}$ **c)** $\frac{128axz}{96ayz}$
d) $\frac{6abc-3ax}{15ac-12ax}$ **e)** $\frac{25abcd-15abu+30ab}{20abz-30abx}$ **f)** $\frac{14a-21b}{15b-10a}$
g) $\frac{4a^2-20ac+25c^2}{2ab-5bc}$ **h)** $\frac{25u^2-49v^2}{25u^2-70uv+49v^2}$

Aufgabe 3.8: Addieren Sie:

a) $\frac{5}{28} + \frac{3}{8} + \frac{9}{35}$ **b)** $\frac{x-y}{xy} + \frac{x+z}{xz} - \frac{y-z}{yz}$
c) $\frac{3u-12v^2}{u^2-14uv+49v^2} - \frac{6}{2u-14v}$

Aufgabe 3.9: Berechnen Sie:

a) $\frac{8}{65} : \frac{14}{39}$ **b)** $\frac{a^2-4b^2}{14a^2} : \frac{2a+4b}{7a}$

Aufgabe 3.10: Vereinfachen Sie:

a) $\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ **b)** $\frac{\frac{u}{v}-1}{1-\frac{1}{v}}$

Aufgabe 3.11: Fassen Sie zusammen:

a) $x^{n-2}x^{2n+5}x^{m-3}$ **b)** $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-3}$ **c)** $\left(\frac{x^4y^{-2}z^3}{a^3b}\right)^2$

Aufgabe 3.12: Schreiben Sie mit gebrochenem Exponenten:

a) $\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt[3]{x^4}$ **c)** $\sqrt[5]{x^{15}}$
d) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ **e)** $\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^2}}$

Aufgabe 3.13: Schreiben Sie unter Verwendung von Wurzeln:

a) $x^{0,5}$ **b)** $x^{\frac{4}{5}}$
c) $x^{0,1}$ **d)** $x^{\frac{-2}{3}}$

Aufgabe 3.14: Vereinfachen Sie so, daß im Nenner keine Wurzel steht:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Aufgabe 3.15: Kürzen Sie:

a) $\frac{4x^6y^7z^{12}}{12x^5y^8z^{13}}$ **b)** $\frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{y^3}}$

Aufgabe 3.16: Schreiben Sie als Logarithmus:

a) $2^3 = 8$ **b)** $a^{0,5} = c$
c) $3^x = 3$ **d)** $e^x = 1$

Aufgabe 3.17: Bestimmen Sie:

a) $\log 0,1$ **b)** $\log 100$
c) $\ln e$ **d)** $\ln e^2$

Aufgabe 3.18: Berechnen Sie x aus:

a) $2\log x = \log 125 - \log 5$ **b)** $\log x = \frac{1}{2}(\log 24 + \log 8 - \log 3)$
c) $\log x = \log_2 8$

Aufgabe 3.19: Untersuchen Sie, welche der folgenden Ausdrücke gleich sind:

a) $\log\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{b_i}\right)$ **b)** $\log\left(\prod_{i=1}^{n} a_i b_i\right)$
c) $\sum_{i=1}^{n} b_i \log a_i$ **d)** $n\log a + n\log b$
e) $\sum_{i=1}^{n} \log a_i + \sum_{i=1}^{n} \log b_i$ **f)** $\log(a^n b^n)$
g) $n\log a$ **h)** $n\log a_i + n\log b_i$

Aufgabe 3.20: Berechnen Sie:

a) $\sum_{i=1}^{5} i^2$ **b)** $\sum_{k=3}^{6}(5k-3)$
c) $\sum_{j=0}^{1} \frac{1}{(j+3)(j+1)}$

Gleichungen mit einer Unbekannten

Aufgabe 4.1: Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf:

a) $\frac{4}{5}x - \left(\frac{2}{3}x + 5\right) = \frac{4}{6}x + 3$ **b)** $\frac{x+4}{x-1} = \frac{x+1}{x+2}$

Aufgabe 4.2: Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf:

a) $\sqrt{x} - 3 = 5$ **b)** $-2 = \sqrt{2x}$ **c)** $\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x-3}$

Aufgabe 4.3: Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

a) $\frac{2}{x^3} = 54$ **b)** $5^x = 20$
c) $2x^2 - 2x = 4$ **d)** $x^2 - 6x + 9 = 0$
e) $4x^2 - 2x + 4 = 0$ **f)** $-3x^4 + 3x^2 = -6$
g) $-2x^4 + 10x^2 - 8 = 0$ **h)** $x^7 - 2x^6 - 8x^5 = 0$
i) $4x^{10} - 24x^9 + 36x^8 = 0$ **j)** $x^6 - 7x^5 = 0$
k) $4x^2 - 36 = 0$ **l)** $3x^2 + 15x = 18$
m) $45x^2 + 15x^2 - 30x = 0$ **n)** $x^3 + 8 = 0$
o) $x^2 + x + 1 = 0$

Ungleichungen mit einer Unbekannten

Aufgabe 5.1: Formen Sie die Ungleichung

$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}y \leq \frac{2}{3}$$

so um, daß x isoliert auf einer Seite steht.

Aufgabe 5.2: Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

a) $\frac{21+x}{2x} + 1 < 5$
b) $\frac{2-x}{4+x} - 5 < 0$
c) $\frac{16x}{x^2+15/4} > 4$
d) $x^2 + |x^3 - x - 2| < 0$
e) $\frac{5x+1}{x^2+1} > \frac{5}{x}$
f) $\frac{3x+2}{x^2+1} < 2$
g) $\frac{3-x}{-2} > 1$
h) $\frac{x+2}{x-2} < 2$
i) $\frac{x-2}{x-1} < \frac{x+1}{x+2}$
j) $\frac{x+3}{x} < 2$
k) $\frac{2+x^2}{x^2} < -4$
l) $x^4 - x^3 - 2x^2 > 0$

Aufgabe 5.3: Schreiben Sie als Intervall:

a) $\{x \,|\, |x-4| \leq 2\}$
b) $\{x \,|\, |x-4| \leq 1\}$
c) $\{x \,|\, x > 2 \wedge x \leq 3\}$
d) $\{x \,|\, |x+1| < 1\}$

Gleichungs- und Ungleichungssysteme

Aufgabe 6.1: Bestimmen Sie analytisch die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme:

a) $x + 2y = 4 \wedge 4x + 10y = 0$
b) $5x - 4y = 3 \wedge 2x + y = 1$
c) $8x + 2y = 10 \wedge x - y = 5$
d) $2x + y = 3 \wedge 10x + 5y - 10 = 0$

Aufgabe 6.2: Bestimmen Sie analytisch die Lösungsmengen der folgenden nichtlinearen Gleichungssysteme:

a) $x + y = 2 \wedge x^2 - 2y = 11$
b) $xy = 0 \wedge 3x + 5y = 15$
c) $x^2y = 1 \wedge 2x^2 + \frac{1}{y} = 3$
d) $x^2 + y^2 = 1 \wedge x - 2y = 1$

Aufgabe 6.3: Bestimmen Sie graphisch die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungssysteme:

a) $x + y \geq 1 \wedge x < 3$
b) $y \leq \frac{1}{2}x + 1 \wedge y \geq 5 - 5x \wedge y \leq 20 - 5x$

Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Aufgabe 7.1: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = a + bx$. Stellen Sie aufgrund einer geeigneten Wertetabelle die Funktion für die folgenden Werte von a und b graphisch dar.

a) $a = 2,\ b = 0,5$ **b)** $a = 0,\ b = 0,5$
c) $a = -1,\ b = 0,5$ **d)** $a = 2,\ b = -0,5$

Aufgabe 7.2: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = a + b(x - c)^2$. Stellen Sie aufgrund einer geeigneten Wertetabelle die Funktion für die folgenden Werte von a, b und c graphisch dar.

a) $a = 2,\ b = 1,\ c = 0$ **b)** $a = 2,\ b = 1,\ c = 2$
c) $a = 2,\ b = 2,\ c = 0$ **d)** $a = 2,\ b = -1,\ c = 0$
e) $a = 0,\ b = 1,\ c = 0$ **f)** $a = -1,\ b = 1,\ c = 0$

Aufgabe 7.3: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = ab^{cx}$. Stellen Sie aufgrund einer geeigneten Wertetabelle die Funktion für die folgenden Werte von a, b und c graphisch dar.

a) $a = 1,\ b = 2,\ c = 1$ **b)** $a = 1,\ b = 2,\ c = -1$
c) $a = 1,\ b = 3,\ c = 1$ **d)** $a = -1,\ b = 2,\ c = 1$

Ableitung von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Aufgabe 8.1: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^{13}$ **b)** $f(x) = 7x^6$
c) $f(x) = x^{0,25}$ **d)** $f(x) = x^{-4}$
e) $f(x) = 4x^{-0,25}$ **f)** $f(x) = 4$
g) $f(w) = 3w^{-1}$ **h)** $f(w) = a^2$
i) $f(x) = \sqrt{x^3}$ **j)** $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

Aufgabe 8.2: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = e^x$ **b)** $f(x) = 2^x$
c) $f(x) = \ln x$ **d)** $f(x) = \log_{10} x$

Aufgabe 8.3: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ **b)** $f(x) = 2x^2 + 4 \ln x + 5e^x$
c) $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ **d)** $f(x) = ax^3bx^2cxd$
e) $f(x) = abcdx^6$ **f)** $f(x) = ax^2 + b^3 - x^2e^x$

Aufgabe 8.4: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (x^2 - 1)(4 + 2x)$
b) $f(x) = (ax - b)(cx^2)$
c) $f(x) = (2 - 3x)(1 + x)(x + 2)$
d) $f(x) = x^2(4x + 6)$
e) $f(x) = (x^2 + 3)x^{-1}$

Aufgabe 8.5: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$
b) $f(x) = \frac{4x}{x+5}$
c) $f(x) = \frac{x+7}{x}$
d) $f(x) = \frac{ax^2+b}{cx+d}$

Aufgabe 8.6: Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) := ax + b$ die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:

a) $f(x)$
b) $xf(x)$
c) $\frac{1}{f(x)}$
d) $\frac{f(x)}{x}$

Aufgabe 8.7: Bilden Sie unter Verwendung der Kettenregel die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (2x^3 - x^2 + 2)^4$
b) $f(x) = \left(2x^3 - x(x^3 + 4)^3\right)^2$
c) $f(x) = x\sqrt{ax^2 - 1}$
d) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
e) $f(x) = e^{ax}$
f) $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$
g) $f(x) = xe^{(ax)^2}$
h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$
i) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
j) $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$
k) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
l) $f(x) = \ln \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2$
m) $f(x) = \frac{a}{x^2(\ln x)^3}$
n) $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
o) $f(x) = \ln(\ln x)$
p) $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1+(a+x^3)^2}}$

Aufgabe 8.8: Bilden Sie die folgenden Ableitungen

a) $\frac{df(t)}{dt} = (2x^3 - x^2 + t \cdot b)^4$
b) $\frac{df(z)}{dz} = \alpha \cdot \left(2z^3 - x(x^3 + 4z)^3\right)^2$
c) $\frac{dp(y)}{dy} = xy\sqrt{ax^2 - z}$
d) $\frac{d\phi(s)}{ds} = s^2 \cdot \sqrt{s + \sqrt{x}}$

Nun hängen die Funktionen nicht nur von einem Argument ab.... Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen

e) $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = (2x^3 - x^2 + t \cdot b)^4$
f) $\frac{\partial f(z,x)}{\partial z} = \alpha \cdot \left(2z^3 - x(x^3 + 4z)^3\right)^2$
g) $\frac{\partial p(y,x,z)}{\partial y} = xy\sqrt{ax^2 - z}$
h) $\frac{\partial \phi(s,x)}{\partial s} = s^2 \cdot \sqrt{s + \sqrt{x}}$

Kurvendiskussion

Bestimmen Sie die lokalen Maxima und die lokalen Minima der folgenden Funktionen.

Aufgabe 9.1:

a) $f(x) = 2x + 5, x \in [0, 23]$

b) $f(z) = 6z^2 + 5z + 3$

c) $f(y) = y^4 - 4y^3 + 4y^2 + 4$

d) $f(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{2}t^2$.

Bestimmen Sie nun das lokale Maximum und lokale Minimum der Funktion $f(x) = 5x + 3$, wenn $x \in [-2, 4)$. Machen Sie sich klar, dass die Funktion mit diesem Definitionsbereich kein globales und damit auch kein lokales Maximum besitzt.

Grundzüge der Lineare Algebra

Aufgabe 10.1: Addieren Sie algebraisch und graphisch die folgenden Vektoren:

a) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.2: Multiplizieren Sie $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ algebraisch und graphisch mit:

a) $\alpha = 2$

b) $\alpha = 0,5$

c) $\alpha = -1$

d) $\alpha = 1$

Aufgabe 10.3: Multiplizieren Sie $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit:

a) $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $y = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $y = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

e) $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Welche Regelmäßigkeit fällt Ihnen auf?

Aufgabe 10.4: Berechnen Sie die Länge von

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ **c)** $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.5: Welche der folgenden Vektorpaare sind orthogonal zueinander?

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.6: Bestimmen Sie die folgenden Matrizenprodukte:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.7: Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen, so diese existiert, die inverse Matrix!

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.8: Welche der folgenden Vektoren sind linear abhängig?

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

e) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.9: Welche der folgenden Matrizen sind symmetrisch?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.10: Bestimmen Sie für

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

den Wert der quadratischen Form $x^\top Ax$ für:

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d)** $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.11: Bestimmen Sie die Determinanten der in Aufgabe 9.7 gegebenen Matrizen.

Aufgabe 10.12: Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaften der in Aufgabe 9.7 gegebenen Matrizen.

Aufgabe 10.13: Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaften folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

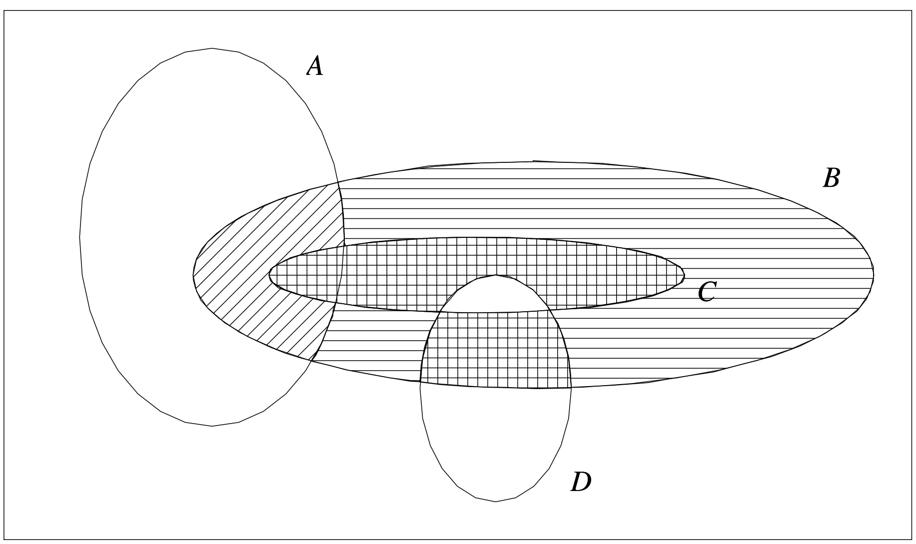
e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Anhang B

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Grundzüge der Mengenlehre

Aufgabe 1.1:



a) diagonal schraffierte Fläche
b) horizontal schraffierte Fläche
c) alle schraffierten Flächen

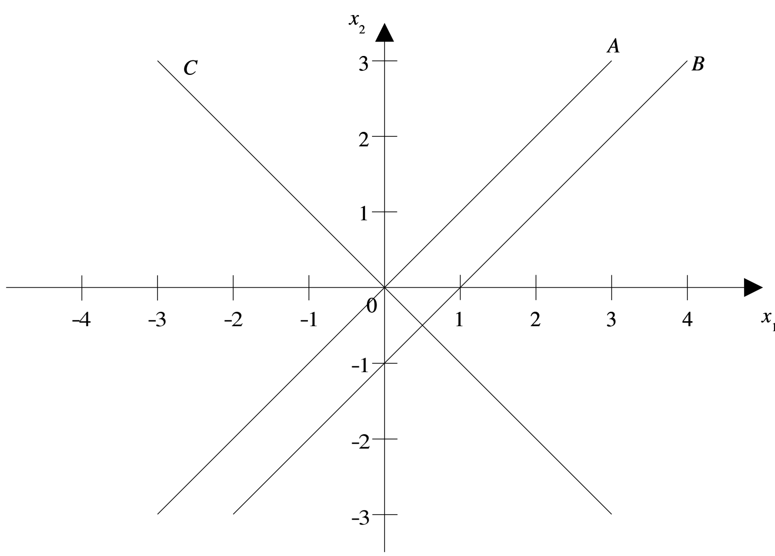
Aufgabe 1.2:

a) A	**b)** C	**c)** f
d) f	**e)** w	

Aufgabe 1.3:

a) 120 **b)** 115 **c)** w
d) w **e)** f

Aufgabe 1.4:



$A \cap C = \{(0, 0)\}$

Grundzüge der Logik

Aufgabe 2.1:

a) wahre Aussage	**b)** falsche Aussage	**c)** keine Aussage
d) keine Aussage	**e)** falsche Aussage	**f)** wahre Aussage

Aufgabe 2.2:

a) $\neg A \wedge \neg B$ mit $A :=$ 'Maier verkauft seine Aktien' und $B :=$ 'Müller verkauft seine Aktien'
b) $A \wedge \neg B$ mit $A :=$ 'Der Himmel ist bewölkt' und $B :=$ 'Es regnet'
c) $(A \Rightarrow \neg B) \wedge (B \Rightarrow \neg A)$ mit $A :=$ 'Die Sonne scheint' und $B :=$ 'Es regnet'
d) $A \vee B \Rightarrow C$ mit $A :=$ 'x ist größer als 2', $B :=$ 'x ist kleiner als -2' und $C :=$ 'x^2 ist größer als 4'

Aufgabe 2.3: Mit $A :=$ 'Die Preise steigen' und $B :=$ 'Die Nachfrage geht zurück'

a) $\neg A \vee \neg B$	**b)** $A \vee B$	**c)** $A \wedge \neg B$

Aufgabe 2.4:

a) notwendig
b) hinreichend
c) notwendig und hinreichend

Aufgabe 2.5: Mit $A :=$ 'Der Gockel kräht auf dem Mist', $B :=$ 'Das Wetter ändert sich' und $C :=$ 'Das Wetter bleibt, wie es ist' lautet die Bauernregel $A \Rightarrow (B \vee \neg B)$. Aus der folgenden Wahrheitstafel ist ersichtlich, daß sie immer wahr ist.

A	B	$\neg B$	$B \vee \neg B$	$A \Rightarrow (B \vee \neg B)$
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w

Aufgabe 2.6:

a) wahr
b) falsch

Bei Änderung der Grundmenge von $A(x)$ auf $\{1, 3, 5\}$ sind beide Aussage wahr.

Arithmetik

Aufgabe 3.1:

a) $d - 2e - f + 2g$
b) $e + 6x$
c) 0
d) $3b$

Aufgabe 3.2:

a) $-xu - xv$
b) $uy - 8xu$
c) $8ac - 12bc - 10ad + 15bd$
d) $12aux - 6auy + 8avx - 4avy + 12bux - 6buy + 8bvx - 4bvy + 12cux - 6cuy + 8cvx - 4cvy$

Aufgabe 3.3:

a) $7x(7z - 2u + 3y)$
b) $6ac(1 - 2b + 6g - 3x)$
c) $(x + 2y)(a + 2b)$
d) $2(a - c)(b + u - v)$

Aufgabe 3.4:

a) $25x^2 - 20xz + 4z^2$ **b)** $2(a^2 - 2ab + b^2)$

Aufgabe 3.5:

a) $(5x - 2y)^2$ **b)** $(7x - 5y)(7x + 5y)$

Aufgabe 3.6:

a) $0,5625$ **b)** $0,7333\ldots$ **c)** $0,555\ldots$

Aufgabe 3.7:

a) $\frac{2}{7}$ **b)** $\frac{4u}{y}$ **c)** $\frac{4x}{3y}$
d) $\frac{2bc-x}{5c-4x}$ **e)** $\frac{5cd-3u+6}{4z-6x}$ **f)** $-\frac{7}{5}$
g) $\frac{2a-5c}{b}$ **h)** $\frac{5u+7v}{5u-7v}$

Aufgabe 3.8:

a) $\frac{227}{280}$ **b)** $\frac{2}{y}$ **c)** $\frac{-12v^2+21v}{(u-7v)^2}$

Aufgabe 3.9:

a) $\frac{12}{35}$ **b)** $\frac{a-2b}{4a}$

Aufgabe 3.10:

a) $b - a$ **b)** $\frac{u-v}{v-1}$

Aufgabe 3.11:

a) x^{3n+m} **b)** x^6 **c)** $\frac{x^8 y^{-4} z^6}{a^6 b^2}$

Aufgabe 3.12:

a) $x^{\frac{1}{2}}$ **b)** $x^{\frac{4}{3}}$ **c)** x^3
d) $x^{-\frac{1}{3}}$ **e)** $x^{\frac{1}{10}}$

Aufgabe 3.13:

a) $\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt[5]{x^4}$
c) $\sqrt[10]{x}$ **d)** $\sqrt[3]{x^{-2}}$

Aufgabe 3.14:

$$-(5+2\sqrt{6})$$

Aufgabe 3.15:

a) $\frac{x}{3yz}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[12]{x^5}\,\sqrt[10]{y^{11}}}$

Aufgabe 3.16:

a) $\log_2 8 = 3$ **b)** $\log_a c = 0,5$
c) $\log_3 3 = x$ **d)** $\ln 1 = x$

Aufgabe 3.17:

a) -1 **b)** 2
c) 1 **d)** 2

Aufgabe 3.18:

a) 5 **b)** 8 **c)** 1000

Aufgabe 3.19:

a)=c), b)=e) und d)=f)

Aufgabe 3.20:

a) 57 **b)** 11/24 **c)** 78

Gleichungen mit einer Unbekannten

Aufgabe 4.1:

a) $x = -15$ **b)** $x = -\frac{3}{2}$

Aufgabe 4.2:

a) $x = 64$ **b)** keine Lösung **c)** $x = 5$

Aufgabe 4.3:

a) $x = \frac{1}{3}$ **b)** $x = \log_5 20$
c) $x = 2 \vee x = -1$ **d)** $x = 3$
e) keine Lösung **f)** $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$
g) $x \in \{-1, 1, 2, -2\}$ **h)** $x \in \{0, 4, -2\}$
i) $x = 0 \vee x = 3$ **j)** $x = 0 \vee x = 7$
k) $x = -3 \vee x = 3$ **l)** $x = -6 \vee x = 1$
m) $x \in \{-1, \frac{2}{3}, 0\}$ **n)** $x = -2$
o) keine Lösung

Ungleichungen mit einer Unbekannten

Aufgabe 5.1:

$$x \geq \frac{1}{3}y - 1$$

Aufgabe 5.2:

a) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$
b) $\mathbb{R} \setminus [-4, -3]$
c) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$
d) $\emptyset$
e) $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$
f) $(-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$
g) $(5, \infty)$
h) $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$
i) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
j) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$
k) $\emptyset$
l) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

Aufgabe 5.3: Schreiben Sie als Intervall:

a) $[2, 6]$
b) $[3, 5]$
c) $(2, 3]$
d) $(-2, 0)$

Gleichungs- und Ungleichungssysteme

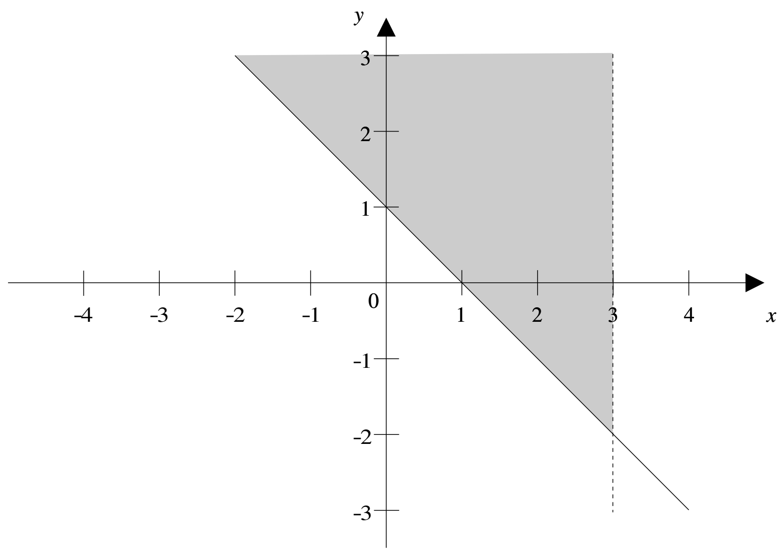
Aufgabe 6.1:

a) $x = 20 \wedge y = -8$
b) $x = \frac{7}{13} \wedge y = -\frac{1}{13}$
c) $x = 2 \wedge y = -3$
d) keine Lösung

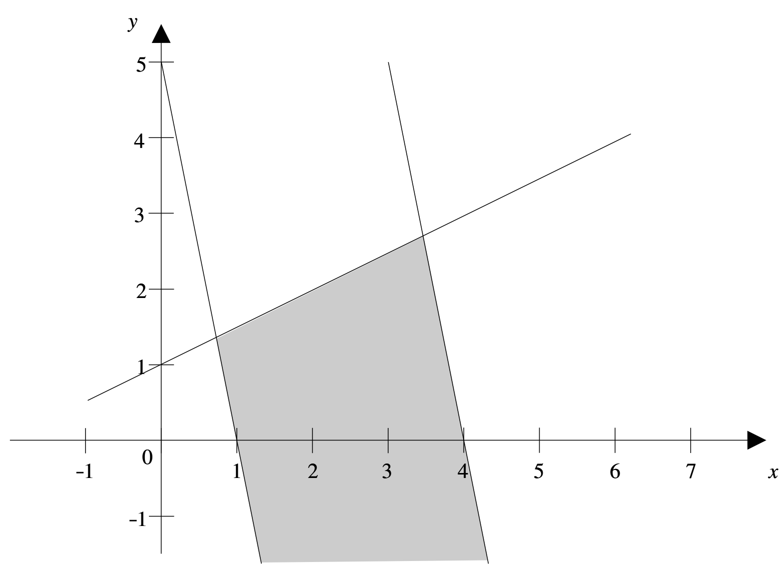
Aufgabe 6.2:

a) 1. Lösung: $x = 3 \wedge y = -1$, 2. Lösung: $x = -5 \wedge y = 7$
b) 1. Lösung: $x = 0 \wedge y = 3$, 2. Lösung: $x = 5 \wedge y = 0$
c) 1. Lösung: $x = 1 \wedge y = 1$, 2. Lösung: $x = -5 \wedge y = 1$
d) 1. Lösung: $x = 1 \wedge y = 0$, 2. Lösung: $x = -\frac{3}{5} \wedge y = -\frac{4}{5}$

Aufgabe 6.3:
a)

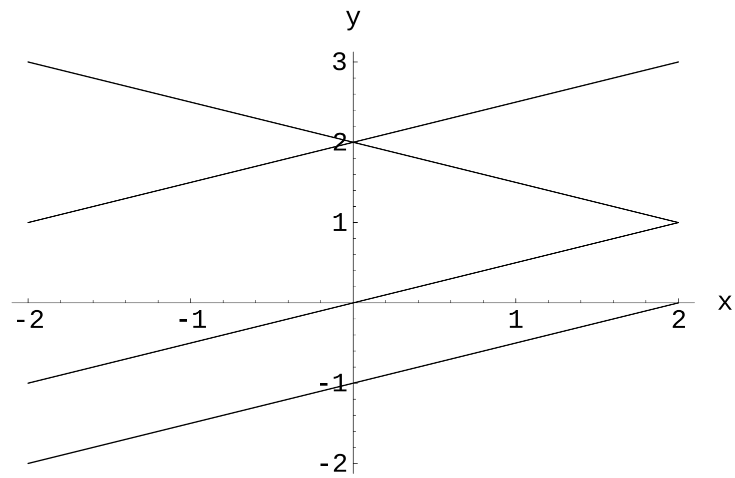


b)

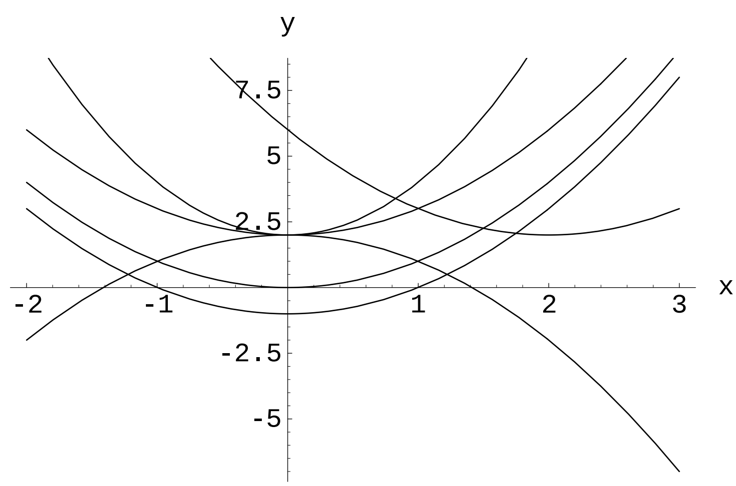


Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

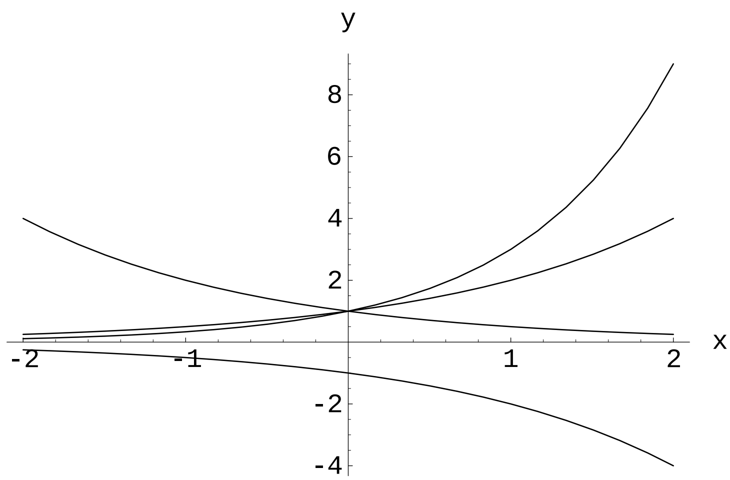
Aufgabe 7.1:



Aufgabe 7.2:



Aufgabe 7.3:



Ableitung von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Aufgabe 8.1:

a) $f'(x) = 13x^{12}$
b) $f'(x) = 42x^5$
c) $f'(x) = 0,25\,x^{-0,75}$
d) $f'(x) = -4x^{-5}$
e) $f'(x) = -x^{-1,25}$
f) $f'(x) = 0$
g) $f'(w) = -3w^{-2}$
h) $f'(w) = 0$
i) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
j) $f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

Aufgabe 8.2:

a) $f'(x) = e^x$
b) $f'(x) = 2^x \ln 2$
c) $f'(x) = x^{-1}$
d) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$

Aufgabe 8.3:

a) $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$
b) $f'(x) = 4x + 4x^{-1} + 5e^x$
c) $f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$
d) $f'(x) = 6abcdx^5$
e) $f'(x) = 6abcdx^5$
f) $f'(x) = 2ax - 2xe^x - x^2e^x$

Aufgabe 8.4:

a) $f'(x) = 2x(4 + 2x) + 2(x^2 - 1)$
b) $f'(x) = acx^2 + 2cx(ax - b)$
c) $f'(x) = -3(1 + x)(x + 2) + (2 - 3x)(x + 2) + (2 - 3x)(1 + x)$
d) $f'(x) = 2x(4x + 6) + 4x^2$
e) $f'(x) = 2 - (x^2 + 3)x^{-2}$

Aufgabe 8.5:

a) $f'(x) = \frac{2x^2-(x^2+3)}{x^2}$
b) $f'(x) = \frac{4(x+5)-4x}{(x+5)^2}$
c) $f'(x) = \frac{x-(x+7)}{x^2}$
d) $f'(x) = \frac{2ax(cx+d)-c(ax^2+b)}{(cx+d)^2}$

Aufgabe 8.6:

a) $\frac{df(x)}{dx} = a$
b) $\frac{dxf(x)}{dx} = 2ax + b$
c) $\frac{d\frac{1}{f(x)}}{dx} = \frac{-a}{(ax+b)^2}$
d) $\frac{d\frac{f(x)}{x}}{dx} = \frac{ax-(ax+b)}{x^2}$

Aufgabe 8.7:

a) $f'(x) = 4(2x^3 - x^2 + 2)^3(6x^2 - 2x)$
b) $f'(x) = 2\left(2x^3 - x(x^3+4)^3\right)\left(6x^2 - (x^3+4)^3 - 3x(x^3+4)^2 \cdot 3x^2\right)$
c) $f'(x) = \sqrt{ax^2-1} + \frac{1}{2}x(ax^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ax$
d) $f'(x) = \frac{1}{2}(x + x^{1/2})^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{2}x^{-1/2}\right)$
e) $f'(x) = ae^{ax}$
f) $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$
g) $f'(x) = e^{(ax)^2} + xe^{(ax)^2} \cdot 2a^2x$
h) $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x)^{-1/2}$
i) $f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$
j) $f'(x) = (1-x^3)^{-1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^3)^{-3/2}(-3x^2)$
k) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
l) $f'(x) = \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^2 2\left(\frac{x-a}{x-b}\right)\frac{x-b-(x-a)}{(x-b)^2}$
m) $f'(x) = a\left((-2x^{-3})(\ln x)^{-3} + x^{-2}(-3)(\ln x)^{-4}x^{-1}\right)$
n) $f'(x) = \frac{1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}\cdot 2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$
o) $f'(x) = \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}$
p) $f'(x) = \left(1+(a+x^3)^2\right)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+(a+x^3)^2\right)^{-3/2}\left(2(a+x^3)\cdot 3x^2\right)$

Aufgabe 8.8:

a) $f'(t) = 4b(2x^3 - x^2 + tb)^3$
b) $f'(z) = 2\alpha\left(2x^3 - x(x^3+4z)^3\right)\left(6z^2 - 12x(x^3+4z)^2)\right)$
c) $f'(y) = x\sqrt{ax^2 - z}$
d) $f'(s) = 2s\sqrt{s+\sqrt{x}} + \frac{s^2}{2\sqrt{s+\sqrt{x}}}$

Die partiellen Ableitungen in (e) bis (h) sehen genauso aus...

Kurvendiskussion

Aufgabe 9.1:

a) Maximum: 23, Minimum: 0
b) Minimum: -5/12
c) Minima: 0 und 2, Maximum: 1
d) Maximum: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Grundzüge der Lineare Algebra

Aufgabe 10.1:

a) $x + y = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $x + y = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$
c) $x + y = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ **d)** $x + y = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.2:

a) $\alpha x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\alpha x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
c) $\alpha x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\alpha x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.3:

a) $xy = 2$ **b)** $xy = \sqrt{2}$ **c)** $xy = 0$
d) $xy = -\sqrt{2}$ **e)** $xy = -2$

Zeichnet man x und y in ein Koordinatensystem, dann sieht man, daß xy am größten ist, wenn x und y genau in dieselbe Richtung zeigen, 0 wird, wenn sie senkrecht zueinander stehen und am kleinsten ist, wenn x und y genau in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Aufgabe 10.4:

a) $||x|| = 1$ **b)** $||x|| = 2$ **c)** $||x|| = 2$

Aufgabe 10.5:

a) und d)

Aufgabe 10.6:

a) $\begin{pmatrix} -16 & 6 \\ -13 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & a-2 & 4 \\ 1 & 2a-1 & -7 \\ 1 & 3a-1 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10.7:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ **c)** existiert nicht

Aufgabe 10.8:

c) und e)

Aufgabe 10.9:

a), c) und d)

Aufgabe 10.10:

a) $x^\top Ax = 2$ **b)** $x^\top Ax = 6$
c) $x^\top Ax = 6$ **d)** $x^\top Ax = 2$

Aufgabe 10.11:

a) -3 **b)** 5
c) 1 **d)** 3

Aufgabe 10.12:

a) A symmetrisch mit $\det A < 0 \Rightarrow A$ ist indefinit
b) A ist nicht symmetrisch und somit das Determinantenkriterium nicht anwendbar. Es gilt daher, die quadratische Form $x^\top Ax$ unmittelbar zu untersuchen:

$$\begin{aligned} x^\top Ax &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, ist $x^\top Ax$ für alle $x \neq 0$ größer als 0. A ist also positiv definit.
c) $a_{11} = 2 > 0 \wedge \det A = 1 > 0 \Rightarrow A$ ist positiv definit
d) $a_{11} = 2 > 0 \wedge \det A = 3 > 0 \Rightarrow A$ ist positiv definit

Aufgabe 10.13:

a) negativ definit **b)** indefinit
c) indefinit **d)** positiv semidefinit
e) negativ semidefinit

Anhang C

Verzeichnis mathematischer Symbole

Allgemeine Symbole der Mathematik

$=$	gleich
$:=$	definitionsgemäß gleich
$\neq$	ungleich
$\approx$	ungefähr gleich
$+$	Additionszeichen (sprich: plus)
$-$	Subtraktionszeichen (sprich: minus)
$\cdot$	Multiplikationszeichen (sprich: mal)
$:, /$	Divisionszeichen (spricht: geteilt durch)
$>$	größer als
$\geq$	größer oder gleich
$<$	kleiner als
$\leq$	kleiner oder gleich
Σ	Summenzeichen
Π	Produktzeichen
$\sqrt{x}$	Quadratwurzel (sprich: Wurzel aus x)
$\sqrt[n]{x}$	n-te Wurzel aus x
a^b	Potenz (sprich: a hoch b)
$\|x\|$	Betrag von x
$f : A \to B$	f ist Funktion von A nach B
$f : a \mapsto b$	a wird abgebildet auf b

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der reellen Zahlen größer gleich 0
$\mathbb{R}_{++}$	Menge der reellen Zahlen größer als 0
$\mathbb{R}^n$	n-faches kartesisches Produkt von $\mathbb{R}$
$[a, b]$	Geschlossenes Intervall
(a, b)	Offenes Intervall
$(a, b]$	Linksoffenes Intervall
$[a, b)$	Rechtsoffenes Intervall

Spezielle Zahlen

e	Eulersche Zahl, $e \approx 2,718281828$
π	Pi, Kreiszahl, $\pi \approx 3,141592654$
∞	Unendlich

Logik

$\wedge$	Konjunktion (sprich: und)
$\vee$	Disjunktion (sprich: oder)
$\neg A, \bar{A}$	Negation (sprich: nicht)
$A \Rightarrow B$	Implikation (sprich: wenn A, dann B)
$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz (sprich: A genau dann, wenn B)
$A :\Leftrightarrow B$	Definition (sprich: A nach Definition genau dann, wenn B)
$\exists x$	Existenzquantor (sprich: es gibt ein x)
$\forall x$	Allquantor (sprich: für alle x)

Mengenlehre

$\in$	ist Element von
$\notin$	ist nicht Element von
$\emptyset, \{\}$	Leere Menge
$\{\, x \mid A(x)\}$	Menge aller x mit der Eigenschaft $A(x)$
$\lvert A\rvert$	Mächtigkeit von A
$\cup$	Vereinigungsmenge (sprich: vereinigt mit)
$\cap$	Schnittmenge (sprich: geschnitten mit)
$\setminus$	Differenzmenge (sprich: minus)
$\subseteq$	Teilmenge von
$\subset$	echte Teilmenge von
$\mathcal{C}_\Omega A$	Komplement von A bezüglich Ω
$\wp(A)$	Potenzmenge von A
$A \times B$	Kartesisches Produkt von A und B
(a, b)	Geordnetes Paar aus a und b (Tupel)
$(a_1, \ldots, a_n)$	n-Tupel

Ableitungen

$\frac{d\,f(x)}{d\,x}, f'(x)$	Erste Ableitung von $f(x)$
$\frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2}, f''(x)$	Zweite Ableitung von $f(x)$
$\frac{d^n\,f(x)}{d\,x^n}, f^{(n)}(x)$	n-te Ableitung von $f(x)$
$x \to a$	Konvergenz von x gegen a (sprich: x gegen a)

Lineare Algebra

$\|\|a\|\|$	Norm oder auch Länge des Vektors a
$(a_{ij})_{n\times m}$	Matrix mit n Zeilen, m Spalten und den Elementen a_{ij}
$A^\top$	Transponierte Matrix zu A (sprich: A transponiert)
A^{-1}	Inverse Matrix zu A
$\|A\|$	Determinante von A

Anhang D

Das griechische Alphabet

Üblicherweise werden in mathematischen Texten Objekte aller Art wie beispielweise Variablen und Funktionen nicht nur mit lateinischen, sondern auch mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Aus diesem Grund ist für die flüssige Lektüre solcher Texte Kenntniss zumindest der gebräuchlichsten griechischen Buchstaben recht hilfreich. Nachfolgend ist eine Aufstellung aller griechischen Groß- und Kleinbuchstaben angegeben.

Bezeichung	Großbuchstabe	Kleinbuchstabe
Alpha	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ϵ, ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ, ϑ
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
My (sprich: mü)	M	μ
Ny (sprich: nü)	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omikron	O	o
Pi	Π	π
Rho	P	ρ, ϱ
Sigma	Σ	σ, ς
Tau	T	τ
Ypsilon	Υ	υ
Phi	Φ	ϕ, φ
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

Literaturverzeichnis

Adams, G./Kruse, H.-J./Sippel, D./Pfeiffer, U. (2013): Mathematik zum Studieneinstieg. 6. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer.

Dörsam, P. (2012): Mathematik zum Studiumsanfang. 7. Auflage, Heidenau: PD.

Purkert, W. (2012): Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. 7. Auflage, Leipzig: Teubner.

Schwarze, J. (2007): Aufgabensammlung zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. 6. Auflage, Herne, Berlin: nwb.

Schwarze, J. (2010a): Elementare Grundlagen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. 8. Auflage, Herne, Berlin: nwb.

Schwarze, J. (2010b): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Band 1: Grundlagen. 13. Auflage, Herne, Berlin: nwb.

Schwarze, J. (2010c): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Band 2: Differential- und Integralrechnung. 13. Auflage, Herne, Berlin: nwb.

Schwarze, J. (2010d): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Band 3: Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Graphentheorie. 13. Auflage, Herne, Berlin: nwb.

Simon, C./Blume, L. (1994): Mathematics for Economists. New York: Norton.

Sydsaeter, K./Hammond, P. (2013): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. 4. Auflage, Pearson.